

ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ И СТРУКТУРА РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ЭКРАНИРОВАННОГО КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

А. В. Сергеев, А. И. Шерстюк

Разработан эффективный метод вычисления высших порядков теории возмущений для потенциалов полиномиального типа, основанный на переходе к задаче теории возмущений для фоковского оператора с чисто дискретным спектром. Учет динамической симметрии невозмущенного оператора позволяет в этом случае выразить поправки любого порядка теории возмущений в виде многочленов с рациональными коэффициентами. Метод используется для расчета связанных состояний уравнения Шредингера с экранированным кулоновским потенциалом. Исследуются аналитические свойства решений. С помощью метода Паде получены точные значения энергии в широкой области изменения параметра экранирования. Вычислены действительные и мнимые части энергий квазистационарных состояний.

1. Введение

В связи с решением ряда принципиальных вопросов квантовой механики и теории поля в последнее время заметно повысился интерес к вычислению высших порядков теории возмущений (ТВ) [1—4]. Наиболее известными квантовомеханическими задачами, для которых детально исследовались аналитические свойства и структура рядов ТВ, являются агармонический осциллятор [4—8] и атом водорода во внешнем поле [9—12].

В настоящей работе обсуждаются различные аспекты применения ТВ Радея-Шредингера для нахождения энергии связанных состояний частицы в поле экранированного кулоновского потенциала

$$V(r) = -Ze^{-\alpha r}/r.$$

Интерес к этой задаче вызван тем, что она имеет многочисленные физические приложения в теории ядра, физике плазмы, физике твердого тела и теории рассеяния [13, 14].

После отделения угловых переменных и масштабного преобразования $r \rightarrow Zr$ задача сводится к радиальному уравнению Шредингера

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{e^{-\epsilon r}}{r} - E \right] P(r) = 0, \quad (1)$$

где $\epsilon = \alpha/Z$. Энергия частицы E_{nl}^Z связана с собственным значением $E = E_{nl}$ уравнения (1) соотношением $E_{nl}^Z = Z^2 E_{nl}$.

Поскольку, как известно, уравнение (1) точно не интегрируется, для его решения приходится пользоваться различными приближенными методами. Обычно применяется численное интегрирование [15] или ТВ по параметру ϵ [3, 16—20]. Применение численных методов не всегда представляется удобным, так как связано с проведением громоздких вычислений для каждого набора параметров ϵ , n и l в отдельности. Кроме того, в таком подходе возможности исследования функциональных свойств решений весьма ограничены.

При малых значениях параметра ϵ возмущающий потенциал $U(r)$ может быть разложен по степеням ϵ :

$$U(r) \equiv r^{-1}(1 - e^{-\epsilon r}) = \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\epsilon r)^{k-1}. \quad (2)$$

В каждом порядке по ϵ он имеет вид полинома по степеням r . Методы ТВ по параметру ϵ позволяют находить приближенные решения в виде

$$E_{nl}(\epsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} E_{nl}^{(N)} \epsilon^N. \quad (3)$$

С точностью до третьего порядка по степеням ϵ найти энергию несложно, так как волновая функция зависит от ϵ только во втором порядке. Нахождение следующих коэффициентов представляет собой довольно трудоемкую задачу.

Для вычисления поправок высшего порядка в задачах квантовой механики в настоящее время широко используется метод, основанный на переходе от уравнения Шредингера к уравнению Риккати для логарифмической производной волновой функции [6, 16, 21, 22]. В случае экранированного кулоновского потенциала в работе [16] этим методом правильно вычислено пять порядков, а в опубликованной недавно работе [23] сообщается о вычислении ~ 100 порядков ТВ для основного уровня и проведено суммирование ряда ТВ. В работе [17] найдено четыре порядка для произвольного состояния¹⁾ с $n=l-1$. Однако применение указанного метода сталкивается со значительными трудностями в случае возбужденных состояний, когда радиальная волновая функция имеет узлы [12, 22]. Поэтому получить общие выражения для поправок высшего порядка ТВ при произвольных n и l в таком подходе не представляется возможным.

Ранее [24] было показано, что, пользуясь методом штурмовских разложений, поправки ТВ к волновым функциям и энергиям водородоподобных атомов могут быть получены в замкнутом аналитическом виде для широкого класса возмущающих потенциалов. Особенно простой вид они имеют в случае потенциалов полиномиального типа. Вычисление поправок высших порядков ТВ сводится при этом к использованию простой рекуррентной процедуры, одинаково удобной как для основного, так и для возбужденных состояний. В работе [3] этим методом найдены точные выражения для первых шести поправок ТВ к энергии произвольного связанного состояния E_{nl} . Позднее [19] такое же число поправок было получено с использованием гипервиральных соотношений и теоремы Гельманна — Фейшмана.

В разд. 2 настоящей работы с учетом динамической симметрии фоковского оператора предпринято дальнейшее усовершенствование предложенного ранее [3] метода. В аналитическом виде получено 13 порядков ТВ для произвольных n и l , численно — более 70 порядков для основного состояния и 50 порядков для всех возбужденных состояний с $n=2, 3$. Исследовано поведение коэффициентов ряда (3) при больших N . В разд. 3 исследована применимость метода аппроксимант Наде для нахождения точных значений $E_{nl}(\epsilon)$ в широкой области изменения ϵ и определения критического значения параметра экранирования ϵ_{nl}^* ($E_{nl}(\epsilon_{nl}^*)=0$). Установлена быстрая сходимость аппроксимант. Исследованы квазистационарные состояния при $\epsilon < 0$ и $\epsilon > \epsilon_{nl}^*$ при $l \neq 0$.

2. Вычисление высших порядков ТВ

Для решения уравнения (1) воспользуемся разложениями по полной системе квадратично интегрируемых функций, связанных с невозмущенным уравнением Шредингера. Посредством замены искомой функции $P(r) \rightarrow y(r) = r^{-3}P(r)$ и независимой переменной $r \rightarrow x = (\cdot 8E_n)^{1/2}r$ приходим

¹⁾ Поправки более высоких порядков, приведенные в [16] и [17], вычислены неверно.

в уравнению

$$(M_1 - n)y = Wy, \quad (4)$$

где $E_0 = -1/2n^2$ — невозмущенная энергия,

$$M_1 = -\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \frac{s^2}{4x} + \frac{x}{4} \quad (5)$$

— фоковский оператор для частицы в кулоновском поле, обладающий чисто дискретным спектром эквидистантных собственных значений

$$\lambda_p = p + (s+1)/2, \quad s = 2l+1, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, от задачи теории возмущений для шредингеровского оператора для частицы в кулоновском поле мы приходим к эквивалентной задаче для фоковского оператора M_1 . Член в правой части уравнения (4), обусловленный наличием возмущения, имеет вид

$$W = 1/2 n^2 x \delta E - V(x), \quad (6)$$

где

$$V(x) = n(1 - e^{-enx/2}) = -n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-enx)^k}{2^k k!} \quad (7)$$

— возмущающий оператор, $\delta E = E - E_0$.

Паряду с M_1 введем операторы

$$M_2 = M_1 - \frac{x}{2}, \quad M_3 = i \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

имеющие чисто непрерывный спектр собственных значений. Ранее [25, 26] было показано, что самосопряженные операторы M_i ($i=1, 2, 3$) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[M_2, M_1] = iM_3, \quad [M_1, M_3] = iM_2, \quad [M_3, M_2] = -iM_1 \quad (9)$$

и, следовательно, являются элементами алгебры Ли некомпактной группы $O(2,1)$. Квадратичная форма

$$Q = M_1^2 - M_2^2 - M_3^2$$

является оператором Казимира группы. Поскольку

$$Q = (s^2 - 1)/4 = l(l+1),$$

полный набор собственных функций $\{y_n^s\}$ оператора M_1 при фиксированном s реализует базис унитарного неприводимого представления группы $O(2,1)$.

Удобно ввести операторы $M_{\pm} = M_2 \pm iM_3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[M_1, M_{\pm}] = \pm M_{\pm}, \quad [M_+, M_-] = 2M_1, \quad (9a)$$

из которых непосредственно вытекает

$$\langle n | M_+ | m \rangle = \langle m | M_- | n \rangle = [(n+l)(m-l)]^{1/2} \delta_{m, n-1}, \quad (10)$$

$$\langle n | \hat{A} | m \rangle = \int_0^{\infty} y_n^s(x) \hat{A} y_m^s(x) dx.$$

Учитывая, что $x = 2(M_1 - M_2) = 2M_1 - M_+ - M_-$, имеем

$$\langle n | x | m \rangle = 2n \delta_{nm} - [(n+l)(m-l)]^{1/2} \delta_{m, n-1} - [(m+l)(n-l)]^{1/2} \delta_{m, n+1}. \quad (11)$$

Соотношение (11) было получено другим способом в работе [26], где отмечена также аналогия штурмовской задачи для атома водорода с задачей о гармоническом осцилляторе.

Коэффициенты аналитических выражений для поправок теории возмущений

N	q	p	$C_{pq}^{(N)}$	N	q	p	$C_{pq}^{(N)}$	N	q	p	$C_{pq}^{(N)}$
0	-1	0	-1/2	7	6	0	-22763/126	10	5	0	-550099/6300
1	0	0	-2	8	3	1	1/4		1	1	160259/84
2	0	1	1			2	145/48		2	2	623447/270
	1	0	-3			3	557/48		3	3	1369049/1080
3	1	0	-2/3			4	2767/192		4	4	399751/1440
	1	1	2	4	0		-17799/560		6	0	-772114291/45360
	2	0	-10/3		1		21681/80		1	1	11701261/360
4	1	1	1/2		2		6779/32		2	2	329953/48
	2	2	5/4		3		829/16		3	3	38207/72
	2	0	-55/12	5	0		-914375/576		7	0	-2414775527/21600
	1	1	5/2		1		10131/8		1	1	44513
	3	0	-77/12		2		10241/96		2	2	981737/720
5	2	0	-2/5	6	0		-5051449/1440		8	0	-721750181/7560
	1	1	5		1		27469/80		1	1	15580619/2520
	2	0	9/2	7	0		-885551/1344		9	0	-909259231/90720
	3	0	-49/2	9	4	0	-2/9		5	0	-2/11
	1	1	7		1		4409/90		1	1	1991/14
	4	0	-171/10		2		31129/216		2	2	772521/1400
6	2	1	1/3		3		38353/216		3	3	315091/300
	2	2	41/18		4		22469/288		4	4	166389/160
	3	0	31/9	5	0		-613085/648		5	5	927271/2400
	3	0	-1057/90		1		232991/72		6	0	-7870603/1400
	1	1	98/3		2		545567/432		1	1	17009603/420
	2	2	21/2		3		35893/216		2	2	1940341/80
	4	0	-386/3	6	0		-60252829/4320		3	3	1692431/240
	1	1	23		1		1362907/180		4	4	148967/160
	5	0	-4763/90		2		18109/48		7	0	-37705747/160
7	3	0	-2/7	7	0		-7905637/432		1	1	46796821/160
	1	1	49/3		1		103247/72		2	2	4254371/120
	2	2	61/2	8	0		32694383/12960		3	3	409591/240
	3	0	103/6	10	4	1	1/5		8	0	-6053053711/7200
	4	0	-937/6		2		359/100		1	1	434135783/1680
	1	1	415/2		3		20563/900		2	2	8396419/1680
	2	2	65/2		4		44773/720		9	0	-5021064583/10080
	5	0	-6050/9		5		55561/900		1	1	91789969/3360
	1	1	517/6						10	0	-216473573/5280

Примечание. Коэффициенты $C_{0,n-1}^{(2n)}$ при $n=1, 2, \dots, 0$ равны нулю и в таблице не приводятся.

Для нахождения поправок к энергии по ТВ будем исходить из тождества

$$\langle n | W(1 - Q_n W)^{-1} | n \rangle = 0, \quad (12)$$

где $Q_n = (M_1 - n)^{-1} P_n$, P_n — проектор на подпространство, ортогональное $|n\rangle$.

Ищем поправку к энергии δE в виде разложения (3) по степеням ϵ , пользуясь формальным разложением, вытекающим из формулы (12):

$$\langle n | x \sum_{k=0}^{\infty} (Q_n W)^k | n \rangle \delta E = \frac{2}{n^2} \langle n | V \sum_{k=0}^{\infty} (Q_n W)^k | n \rangle. \quad (13)$$

Подставляя в формулу (13) разложения (7) для V и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ϵ , можно выразить величины $E^{(N)}$ через поправки меньшего порядка и через матричные элементы от произведений нескольких операторов x и Q_n .

Редуцированный гриновский оператор Q_n невозмущенной задачи может быть представлен в виде разложения по собственным функциям y_m опе-

$$Q_n = \sum_{m \neq n} \frac{|m\rangle\langle m|}{m-n}. \quad (14)$$

В случае полиномиального возмущающего потенциала типа (2) или (7) все суммы по промежуточным состояниям $|m\rangle$, входящие в соотношение (13), обрываются при конечных m .

Действительно, в силу «правила отбора» (11) при целых $q \geq 0$ имеем $\langle m|x^q|n\rangle = 0$ при $|m-n| > q$. Таким образом, поправки любого порядка ТВ можно выразить в виде простых аналитических выражений, содержащих многочлены от n и l с рациональными коэффициентами. Таким методом в явном виде найдены поправки к энергии до 13 порядка по ϵ при любых n и l . Они имеют следующий вид:

(15)

$$E_{nl}^{(N)} = \left(\frac{-1}{2}\right)^N \sum_{p=0}^k \sum_{q=N-k-1}^{N-p-1} C_{pq}^{(N)} \Lambda^p n^{2q},$$

где $\Lambda = l(l+1)$, k — целая часть числа $N/2$. Коэффициенты $C_{pq}^{(N)}$ являются рациональными числами. Их значения представлены в табл. 1.

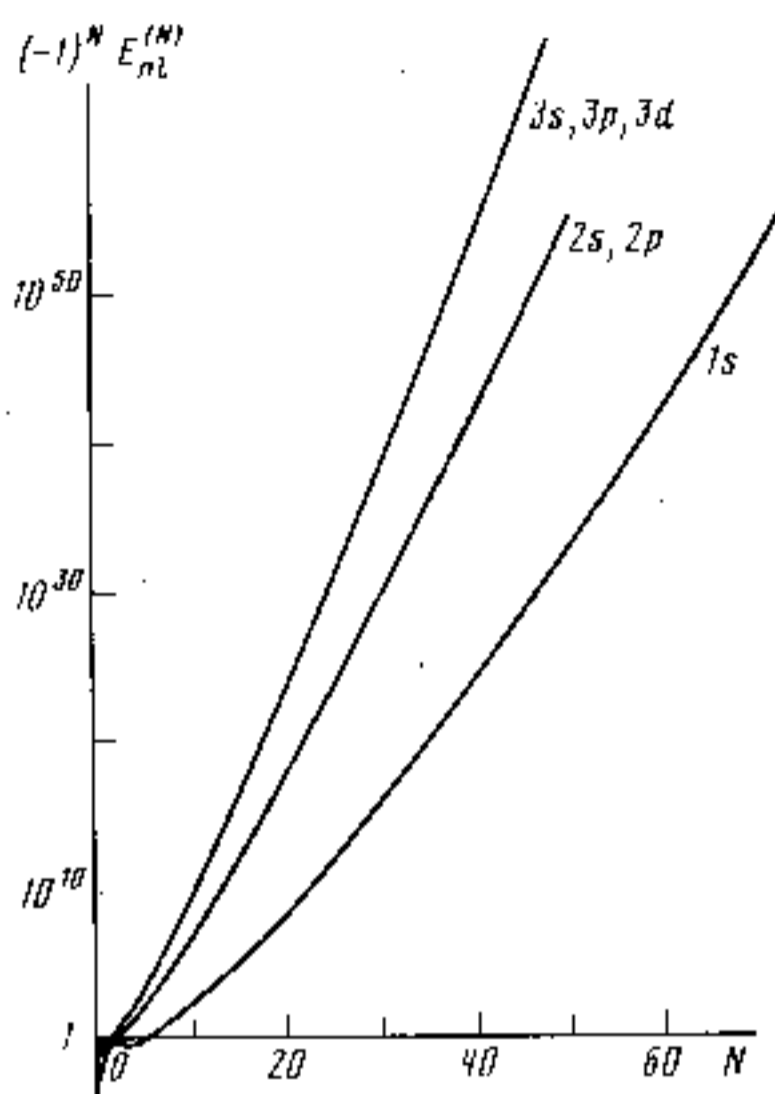


Рис. 1. Коэффициенты разложения энергии по степеням ϵ

Отметим, что предложенный метод является достаточно универсальным и свободен от трудностей, возникающих, например, при расчете возбужденных состояний с использованием методов, основанных на уравнении Рундкати [12, 22].

На рис. 1 в полулוגарифмическом масштабе представлена зависимость величин $(-1)^N E_{nl}^{(N)}$ от N для $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$ -состояний. В пределах точности рисунка кривые для состояний с одним и тем же n практически совпадают между собой. Для основного состояния найденная зависимость хорошо аппроксимируется функцией $f(N) = (N/e \ln N)^N$ в широкой области N .

3. Применение метода аппроксимант Паде

Как показано в работе [3], ввиду асимптотического характера рядов (3) их непосредственное суммирование не дает удовлетворительных результатов уже при $\epsilon \geq 0,3\epsilon_{nl}^*$, где ϵ_{nl}^* — критическое значение параметра экранирования, при котором уровень выходит в сплошной спектр. Таким образом, вычисление высоких порядков ТВ в этом случае оказывается бесполезным. Однако применение обобщенных методов суммирования формально расходящихся рядов [27] позволяет использовать информацию, заключенную в коэффициентах разложения, для нахождения искомой функции в достаточно широкой области изменения ϵ . Эффективность таких методов зависит в первую очередь от числа членов разложения, которые могут быть учтены с достаточной точностью. Следовательно, для

Сходимость диагональных АП

N	$E_{10}^{[N/N]} (0,6)$	$E_{10}^{[N/N]} (1,1907)$	$E_{10}^{[N/N]} (2)$	$E_{21}^{[N/N]} (0,2)$
1	-0,086206897	0,12899328	0,300000	0,008333
2	-0,083569405	0,13406982	0,307692	0,011842
3	-0,107372719	-0,04445824	-1,276265	-0,004331
5	-0,106143442	-0,00057017	-0,171065	-0,003772
7	-0,106136003	-0,00001841	-0,162066	-0,004078
10	-0,106135907	0,00000001	-0,161572	-0,004093
14	-0,106135907	-0,00000002	-0,161572	-0,004098

Таблица 3

Сходимость корней АП

N	1s	2s	3s
1	1,3333333	0,3333333	0,148148
2	1,2080718	0,309985	0,138432
3	1,1938110	0,308729	0,138138
5	1,1907975	0,310971	0,139634
7	1,1906252	0,310223	0,139434
10	1,1906123	0,310210	0,139451
14	1,1906124	0,310209	0,139451
	1,1906124 [34]	0,3103 [15]	0,1395 [15]

их применения вычисление высоких порядков ТВ оказывается существенным.

Различные методы обобщенного суммирования рядов ТВ в задачах квантовой механики и теории поля в последнее время использовались рядом авторов [23, 28–31]. В случае экранированного кулоновского потенциала было показано [3], что при учете сравнительно небольшого числа членов разложения ($N=6, 7$) методы Эйлера, Гельдера и Хаттона позволяют получать удовлетворительные результаты (с точностью до 10^{-3}) в области $0 \leq \epsilon \leq 0,7\epsilon_{nl}$. Однако для получения надежных результатов во всей области изменения ϵ вплоть до ϵ_{nl} требуется знание значительно большего числа членов разложения. Одним из наиболее эффективных методов в этом случае является метод аппроксимант Паде (АП) [32, 33], который позволяет приближенно учесть наличие полюсов искомой функции и аппроксимировать, таким образом, эту функцию в области далеко за пределами сходимости ряда Тейлора. Преимущества метода Паде проявляются в том случае, когда имеется достаточно много точных коэффициентов исходного ряда.

Как известно [32, 33], АП $[M/L]$ к функции $f(z)$ определяется как отношение двух многочленов: $P_M(z)$ и $Q_L(z)$ соответственно степеней M и L , которое имеет те же первые $M+L+1$ коэффициентов разложения в ряд Тейлора, что и $f(z)$:

$$f^{[M/L]}(z) \equiv P_M(z)/Q_L(z) = f(z) + O(z^{M+L+1}). \quad (16)$$

В работе [31] численно найдено 13 коэффициентов разложения (3), с помощью которых построены АП $[6/6]$ и $[7/6]$, позволяющие приблизить энергию в области $\epsilon < \epsilon_{nl}$ с точностью три–четыре десятичных знака. Большое число коэффициентов разложения, полученное в работе [23] для основного 1s-состояния, позволило авторам исследовать сходимость диагональных АП к энергии, $E_{10}^{[N/N]}$, вплоть до $N=18$. Показано, что АП, начиная с $[10/10]$, дают в этом случае хорошее приближение к энергии в области $0 < \epsilon < \epsilon_{10}$. В настоящей работе найдено 73 члена разложения

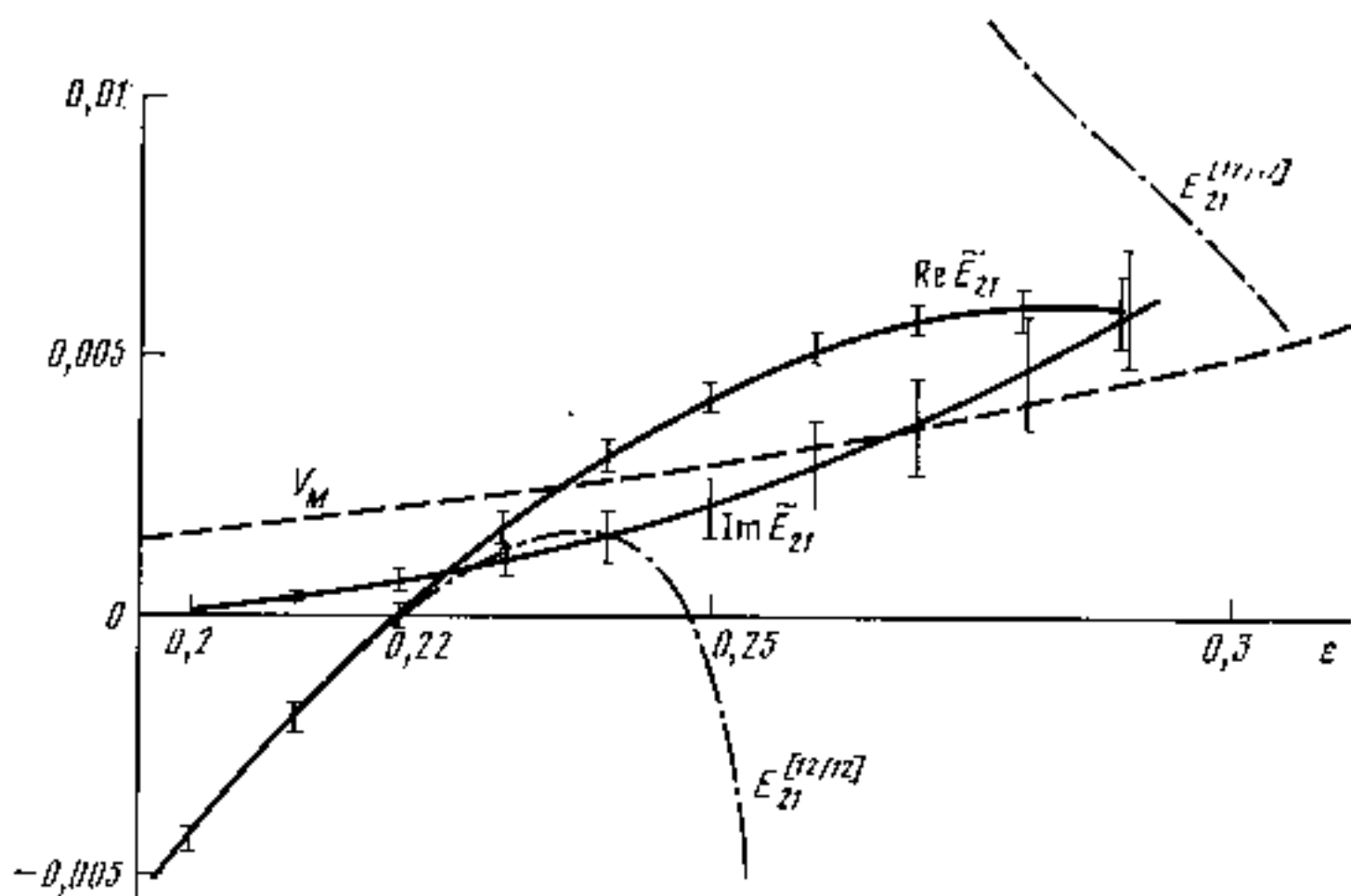


Рис. 2. Поведение АП в области $\epsilon \sim \epsilon_{21}^*$ для состояния $2p$

(3) для основного и 50 членов для ряда возбужденных состояний. Такого количества коэффициентов вполне достаточно для исследования сходимости АП в широкой области изменения ϵ , включающей ϵ_{nl}^* , а также для рассмотрения случая квазистационарных состояний.

Табл. 2 демонстрирует характер сходимости диагональных АП для состояний $1s$ и $2p$ при различных значениях ϵ . Вычисления показывают, что при $l=0$ АП быстро сходится при $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{n0}^*$, а для основного состояния — даже до $\epsilon \approx 5\epsilon_{10}^*$, причем, как и следовало ожидать, предельная функция имеет нулевую производную при $\epsilon = \epsilon_{n0}^*$. Для состояний с $l \neq 0$ АП сходится несколько медленнее.

Так как графики функций $E_{nl}(\epsilon)$ касаются оси абсцисс, то для определения критического параметра экранирования удобно аппроксимировать функции $[-E_{nl}(\epsilon)]^{1/2}$ и находить их корни. Корни АП к функции $[-E_{nl}(\epsilon)]^{1/2}$, являющиеся приближенными значениями ϵ_{nl}^* , приведены в табл. 3 и сравниваются с наиболее точными из полученных ранее [15, 34] значениями ϵ_{nl}^* (последняя строка таблицы). Отличие корней АП от ϵ_{nl}^* характеризует точность вычисления энергии в наименее благоприятном случае при $\epsilon = \epsilon_{nl}^*$. Таблица демонстрирует быструю сходимость корней. Для состояний $2s$ и $3s$ величина ϵ_{n0}^* , определенная как предельное значение корней АП, вычислена на два порядка точнее, чем значение, полученное численным интегрированием в [15], а для основного состояния — с той же точностью, которая была достигнута аналитическим методом, рассмотренным в [34], и на порядок точнее, чем значение $\epsilon_{10}^* = 1,190612$, полученное в [23].

В случае $l \neq 0$ при $\epsilon = \epsilon_{nl}^*$ производная $dE_{nl}/d\epsilon \neq 0$, и значения ϵ_{nl}^* определяются точками пересечения кривых $E_{nl}(\epsilon)$ с осью абсцисс. Учитывая более медленную, чем в случае s -состояний, сходимость АП в области $\epsilon \sim \epsilon_{nl}^*$, численные значения ϵ_{nl}^* при $l \neq 0$ были найдены как корни диагональных АП, $E_{nl}^{[N,N]}$, при $N=12 \div 14$ с точностью до трех знаков:

$$\epsilon_{21}^* = 0,220; \quad \epsilon_{31}^* = 0,112; \quad \epsilon_{32}^* = 0,0913.$$

На отрезках $(\epsilon_{nl}^*, \infty)$ при $l \neq 0$ накапливается много полюсов АП, и последовательность АП становится расходящейся. Такое расположение полюсов характерно в том случае, если функция имеет разрывы [32] и отра-

жаст то обстоятельство, что в данном случае мы имеем дело с квазистационарными состояниями и функция $E_{nl}(\epsilon)$ становится неоднозначной функцией комплексной переменной ϵ . При $l \neq 0$ и $\epsilon > \epsilon_{nl}^*$ квазистационарные состояния возникают вследствие наличия центробежного потенциального барьера.

Для нахождения энергий квазистационарных состояний требуется приблизить посредством АП некоторую многозначную функцию. Для этого введем новую переменную t так, чтобы

$$\epsilon = \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

и потребуем, чтобы функция, обратная $\varphi(t)$, была многозначной. После этого будем вычислять АП к функции $E_{nl}(\varphi(t))$ как функции переменной $t = \varphi^{-1}(\epsilon)$.

Выберем, например, функцию

$$\varphi(t) = a(e^t - 1), \quad (17)$$

где $a \in (-\epsilon, 0)$. Расчеты показывают, что при таком выборе $\varphi(t)$ АП $\tilde{E}_{nl}^{[M/L]}$ к функции $E_{nl}(\varphi(t)) = \tilde{E}_{nl}(t)$ при $t = \ln(-\epsilon/a - 1) \pm i\pi$ сходятся в значительно более широкой области ϵ , чем АП к $E_{nl}(\epsilon)$ (что соответствует случаю $\varphi(t) \equiv t$).

На рис. 2 сплошными линиями изображены вещественная и мнимая части функции $\tilde{E}_{21}^{[N/N]}$ в области $\epsilon \sim \epsilon_{21}^*$ при $N=12, 13, 14$ и $a = -0,08$. Вертикальные черточки на графике демонстрируют разброс значений АП при изменении N от 12 до 14. На этом же рисунке приведены графики максимального значения потенциала V_M (птриховая линия) и значения обычных АП $\tilde{E}_{21}^{[12/12]}(\epsilon)$ (штрихпунктир). Отметим, что $\text{Im} \tilde{E}_{21}^{[N,N]}$ заметно отличается от нуля при ϵ , немного меньших ϵ_{21}^* , что связано, по-видимому, с конкретным выбором функции $\varphi(t)$.

Авторы благодарны М. А. Брауну, Ю. Ю. Дмитриеву и Л. Н. Лабзовскому за полезное обсуждение ряда вопросов, затронутых в статье.

Литература

1. Липатов Л. Н. ЖЭТФ, 1976, 71, 2010; 1977, 72, 411.
2. Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, 193; ЖЭТФ, 1978, 74, 445.
3. Шерстюк А. И., Школьник А. М. Изв. АН СССР, сер. физ., 1977, 41, 2648.
4. Bender C. M., Wu T. T. Phys. Rev., 1969, 184, 1231; 1973, D7, 1620.
5. Banks T., Bender C. M., Wu T. T. Phys. Rev., 1973, D8, 3346, 3366.
6. Долгов А. Д., Попов В. С. ЖЭТФ, 1978, 75, 2010. Долгов А. Д., Елецкий В. Л., Попов В. С. ЖЭТФ, 1980, 79, 1704.
7. Killingbeck J. J. Phys., 1980, A1, 49.
8. Caliceti E., Graffi S., Maioli M. Comm. Math. Phys., 1980, 75, 51.
9. Silverstone H. J. Phys. Rev. Lett., 1979, 43, 1498.
10. Aliluev S. P., Eletsky V. L., Popov V. S. Phys. Lett., 1979, 73A, 103.
11. Pritman V. Phys. Rev., 1980, A22, 1833.
12. Аллилуев С. П., Вайнберг В. М., Елецкий В. Л., Попов В. С. ДАН СССР, 1980, 254, 1392.
13. Gazeau J. D., Maquet A. Phys. Rev., 1979, A20, 727.
14. Jablonski A. J. Phys., 1981, B14, 281.
15. Rogers F. J., Graboske H. C., Harwood D. J. Phys. Rev., 1970, A1, 1577.
16. Полюканов В. С. ЖЭТФ, 1967, 52, 1326.

17. *Jafrate G. I., Mendelsohn L. B.* Phys. Rev., 1969, **182**, 244.
18. *McEneaney J., Kissel L., Pratt R. H.* Phys. Rev., 1976, **A13**, 532.
19. *Grant M., Lai C. S.* Phys. Rev., 1979, **A20**, 718.
20. *Lai C. S., Suen B.* Phys. Rev. 1980, **A24**, 1100.
21. *Зельдович Я. Б.* ЖЭТФ, 1956, **31**, 1101.
22. *Поликинов В. С.* ТМФ, 1975, **24**, 230.
23. *Eletsky V. L., Popov V. S., Weinberg V. M.* Phys. Lett., 1981, **84A**, 235.
24. *Шерстюк А. И.* ЖЭТФ, 1972, **62**, 1238; ТМФ, 1974, **21**, 224.
25. *Дмитриев В. Ф., Румер Ю. Б.* ТМФ, 1970, **5**, 276.
26. *Павинский П. П., Шерстюк А. И.* Вестник ЛГУ, 1968, **22**, 11.
27. *Харди Г.* Расходящиеся ряды, М., ИИЛ, 1951.
28. *Елецкий В. Л., Попов В. С.* ЯФ, 1978, **28**, 1109; ДАН СССР, 1980, **250**, 74.
29. *Silverstone, H. J., Koch P. M. J.* Phys., 1978, **B12**, 537.
30. *Казюков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.* ТМФ, 1979, **38**, 45.
31. *Lai C. S.* Phys. Rev., 1981, **A23**, 455.
32. *Basdevant J. L.* Fortschritte der Phys., 1972, **20**, 283.
33. *Baker G. A.* Essentials of Pade Approximants. N. Y., 1975.
34. *Kesarwani R. N., Varshni Y. P.* J. Math. Phys., 1978, **19**, 819.

Поступила в редакцию
12.IX.1981

HIGHER ORDERS AND STRUCTURE OF PERTURBATION THEORY SERIES FOR SCREENED COULOMB POTENTIAL

A. V. Sergeev, A. I. Sherstyuk

An effective method is developed for calculating the higher orders in perturbation theory for potentials of the polynomial type. It is based on the transition to the problem of perturbation theory for the Fock operator with a purely discrete spectrum. Allowance for dynamic symmetry of the unperturbed operator permits one in this case to express the corrections of any order in perturbation theory as polynomials with rational coefficients. The method is employed to calculate the bound states of the Schroedinger equation with a screened Coulomb potential. The analytical properties of the solutions are investigated. Exact values of the energy in a broad range of variation of the screening parameter is obtained by the Pade technique. The real and imaginary parts of the energies of the quasi-stationary states are calculated.
