

© 1991 г.

СЕРГЕЕВ А. В.

ПОЗИТРОННО-ЯДЕРНЫЕ РЕЗОНАНСЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(Поступила в редакцию 7 марта 1991 г.)

Изучаются резонансные состояния позитрона в кулоновском поле ядра и в параллельных однородных электрическом и магнитном полях. В рамках классического описания позитрон совершает колебательное движение вдоль оси симметрии, попеременно отражаясь от ядра и анода. Магнитное поле не позволяет позитрону обогнуть ядро и улететь к катоду, стабилизируя резонансы. Ядро считается бесконечно тяжелым, и задача сводится к одночастичному уравнению Шредингера. Для определения энергий и ширин резонансов используются варианты теории возмущений в слабом электрическом и в сильном магнитном полях, $1/n$ -разложение и квазиклассика. Различные методы хорошо согласуются между собой.

1. Положительно заряженное ядро действует на позитрон как отталкивательный кулоновский центр, поэтому в такой системе не образуется связанных состояний. Однако при наличии внешних полей, в том числе поля другого ядра¹⁾, появляются квазистационарные состояния. Здесь изучается случай параллельных однородных электрического ($\vec{\mathcal{E}}$) и магнитного ($\vec{\mathcal{H}}$) полей. Несмотря на то что существует много работ о движении электрона в поле ядра и в полях $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$, случай движения позитрона в тех же полях до сих пор не рассматривался. Как одна из простейших эта модель заслуживает теоретического рассмотрения.

Система типа pe^+ не является электрически нейтральной и быстро разрушается, притягиваясь к катоду. Поэтому резонансы pe^+ будут возникать при рассеянии позитронов на протонах в полях $\vec{\mathcal{E}} \parallel \vec{\mathcal{H}}$ лишь на короткое время. В эксперименте переходы между различными квазистационарными уровнями дадут отдельные линии в спектре радиоизлучения.

В п. 2 получена асимптотика энергии в слабом электрическом поле, а в п. 3 — в сильном магнитном поле. В п. 4 применяется $1/n$ -разложение (для состояний, которые в пределе $n \rightarrow \infty$ описываются классическим движением позитрона по круговой орбите). В п. 5 для чисто электрического поля (при $\mathcal{H}=0$) используются квазиклассические правила квантования.

2. Считая ядро бесконечно тяжелым, будем решать одночастичное уравнение Шредингера с потенциалом

$$V(\rho, z) = 1/r + \mathcal{E}z + 1/2 \mathcal{H}^2 \rho^2, \quad (1)$$

где ρ, z — цилиндрические координаты, $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ направлены вдоль оси z и используется атомная система единиц $\hbar = m_e = e = 1$. Заряд ядра полагаем равным единице, чего можно всегда достичь масштабированием. В (1) опущен парамагнитный член $1/2 \mathcal{H} (L_z + 2S_z)$, вклад которого в энергию тривиален.

В рамках классического приближения позитрон может покоиться в точке экстремума потенциала (1) на оси симметрии при $z = z_0 = \mathcal{E}^{-1/2}$ или колебаться вдоль оси z между ядром и анодом. В достаточно сильном магнитном поле $\mathcal{H} > 2\mathcal{E}^{1/2}$ точка $(\rho_0 = 0, z_0)$ становится локальным минимумом

¹⁾ Позитроны могут временно захватываться открытым резонатором, образующимся в промежутке между двумя ядрами [1]. Такие резонансы могут и не иметь отношения к узким позитронным линиям, наблюдавшимся в эксперименте (так называемый «дармштадский эффект»).

потенциала и выполняется условие устойчивости. При этом электрическое и магнитное поля в окрестности точки (ρ_0, z_0) образуют резонатор.

Нижняя граница энергии резонансов дается минимумом потенциала

$$E_0 = V(\rho_0, z_0) = 2\mathcal{E}^{1/2}.$$

Верхняя граница энергии, выше которой в классическом пределе возможен распад резонанса, дается значением потенциала в седловой точке

$$E_s = V(\rho_s, z_s) = 3/2 (\mathcal{H}/2)^{2/3} + 2\mathcal{E}^2/\mathcal{H}^2,$$

где

$$\rho_s = 2\mathcal{H}^{-1} [(\mathcal{H}/2)^{2/3} - 4\mathcal{E}^2/\mathcal{H}^2]^{1/2}, \quad z_s = 4\mathcal{E}/\mathcal{H}^2.$$

Представим потенциал в виде $V = V_0 + W$, где

$$V_0(\rho, z) = 2\mathcal{E}^{1/2} + 1/8 \mathcal{H}^2 \rho^2 + [-1/2 \rho^2 + (z - z_0)^2] \mathcal{E}^{3/2}$$

— потенциал гармонического осциллятора в сумме с энергией E_0 ,

$$W(\rho, z) = [3/2 \rho^2 - (z - z_0)^2] (z - z_0) \mathcal{E}^2 + [3/8 \rho^4 - 3(z - z_0)^2 \rho^2 + (z - z_0)^4] \mathcal{E}^{5/2} + O(\mathcal{E}^3) \quad (2)$$

— потенциал возмущения. В приближении гармонического осциллятора

$$E = 2\mathcal{E}^{1/2} + (2n_\rho + m + 1) \omega_\rho + (n_z + 1/2) \omega_z,$$

где $\omega_\rho = \alpha \mathcal{E}^{1/4}$ и $\omega_z = \sqrt{2} \mathcal{E}^{3/4}$ — частоты осциллятора, $n_z, n_\rho, m = 0, 1, 2, \dots$ — квантовые числа и

$$\alpha = (\mathcal{H}^2/4\mathcal{E}^{3/2} - 1)^{1/2}. \quad (3)$$

С учетом ангармонизма (2) находим

$$E = 2\mathcal{E}^{1/2} + \left(\alpha N + \frac{\sqrt{2}}{2} p \right) \mathcal{E}^{3/4} + \left\{ \frac{1}{64} (5 - 3p^2) - \frac{3}{32\alpha(2\alpha^2 - 1)} \times \right. \\ \left. \times \left[4\sqrt{2}(1 + \alpha^2) p N + \frac{1 + 4\alpha^2}{\alpha} (m^2 - 1) - \frac{3}{\alpha} N^2 \right] \right\} \mathcal{E} + O(\mathcal{E}^{5/4}), \quad (4)$$

где для краткости введем обозначения

$$N = 2n_\rho + m + 1, \quad p = 2n_z + 1. \quad (5)$$

Очевидно, что формула (4) представляет собой асимптотическое разложение энергии (по степеням $\mathcal{E}^{1/4}$) при $\mathcal{E} \rightarrow 0$ и фиксированном отношении $\mathcal{H}^2/\mathcal{E}^3$.

Третий член в (4) имеет полюс при $\alpha = 0$, отвечающий исчезновению минимума потенциала. Другой полюс, при $\alpha = \sqrt{2}/2$, соответствует квазипересечению нескольких уровней с одинаковой суммой $n_z + n_\rho$ и, следовательно, с одной и той же энергией осциллятора. Для низших уровней $|0, 0, m\rangle$ квазипересечения не происходит и этот полюс, как и следовало ожидать, сокращается с нулем выражения, стоящего в квадратных скобках. Сумма и произведение энергий двух возбужденных состояний $|0, 1, m\rangle$ и $|1, 0, m\rangle$ также не имеют полюса при $\alpha = \sqrt{2}/2$. Таким образом, можно найти эти энергии вблизи точки квазипересечения путем решения квадратного уравнения. Аналогично энергии состояний $|0, 2, m\rangle, |1, 1, m\rangle$ и $|2, 0, m\rangle$ находятся из кубического уравнения.

Результаты расчета различных уровней энергии с $m = 0$ по формуле (4) с учетом предыдущих замечаний даны на рис. 1. Магнитное поле фиксировано и составляет 23,5 кГс, или 10^{-5} ат. ед. Исчезновение минимума потенциала происходит при $\mathcal{E}_c = (\mathcal{H}/2)^{1/3} = 440$ В/см, а квазипересечение уровней с одинаковыми $n_z + n_\rho$ — при $\mathcal{E}_q = \sqrt{2}/3 \mathcal{E}_c = 359$ В/см.

При $\mathcal{E} = 0$ имеются лишь уровни Ландау с энергиями $N\mathcal{H}/2$ ²⁾. При $\mathcal{E} > 0$ каждый уровень Ландау переходит в бесконечную серию подуровней с

²⁾ В отличие от атома водорода система pe^+ при $\mathcal{E} \rightarrow 0$ распадается (позитрон удаляется от ядра и переходит на уровень Ландау). Из-за этого энергия и другие величины имеют особенность при $\mathcal{E} = 0$. Например, расстояние между соседними уровнями $\Delta E \sim \mathcal{E}^{3/4}$. Такое же необычное поведение ΔE при $\mathcal{E} \rightarrow 0$ характерно и для околопороговых штарковских резонансов, там оно следует из квазиклассики [2].

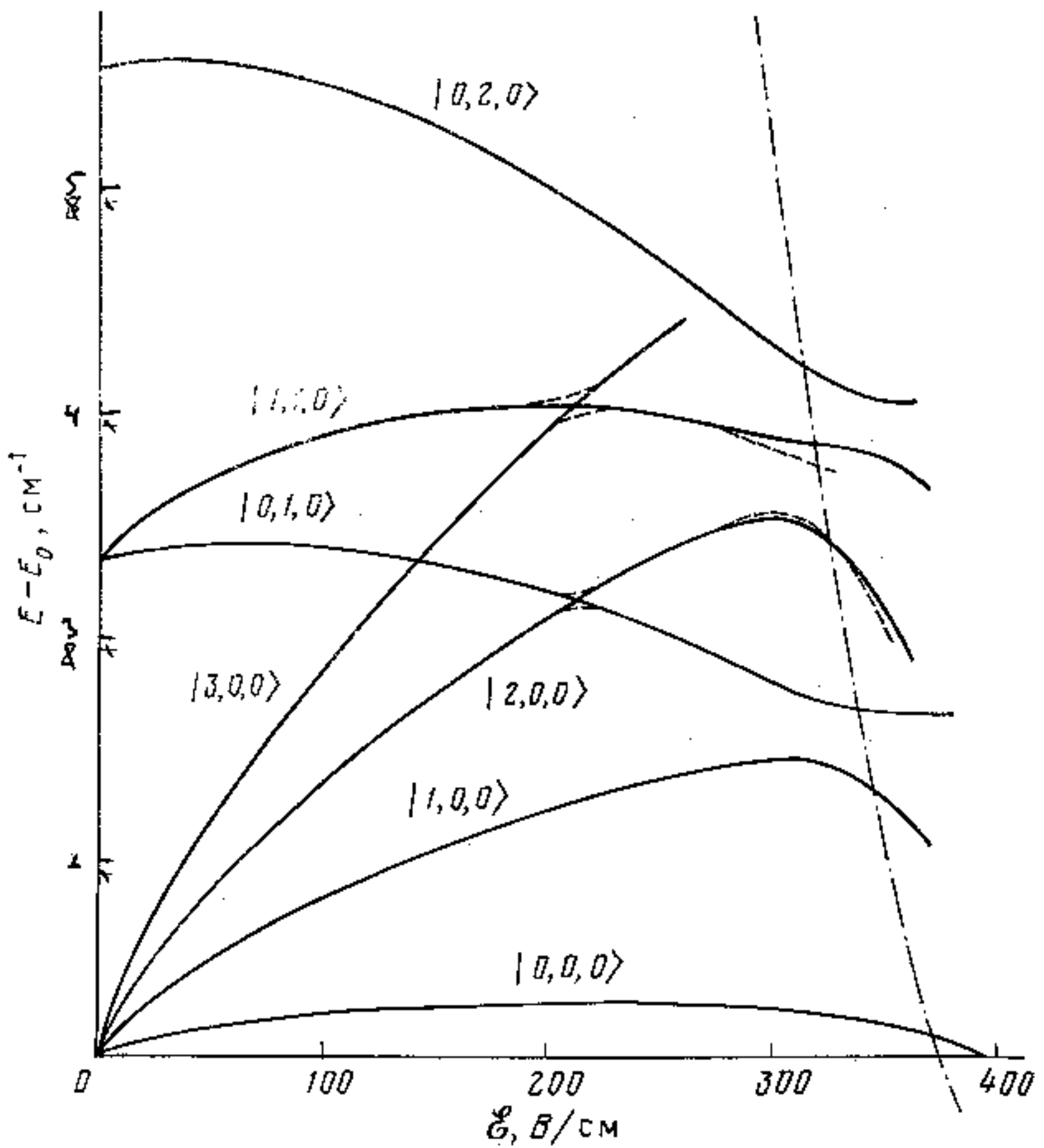


Рис. 1. Энергия позитронных резонансов в полях $\vec{E} \parallel \vec{H}$ при $H = 23,5$ кГс. Сплошные кривые — формула (4), штриховые — более точный результат суммирования $1/n$ -разложения. У кривых указаны квантовые числа $|n_z, n_\rho, m\rangle$. Штрихпунктирной линией нанесена высота потенциального барьера $E_s - E_0$

различными n_z за счет возможности квантования движения вдоль оси z . В эксперименте квантовые переходы между близкими квазистационарными уровнями могут наблюдаться в радиочастотном диапазоне длин волн.

Штриховые кривые на рис. 1 — точная энергия, полученная суммированием $1/n$ -разложения (см. далее п. 4). Видно, что для описания квазипересечения уровней $|n_z, 1, 0\rangle$ и $|n_z + 2, 0, 0\rangle$ необходимы более высокие члены разложения (4). При достижении классического порога распада E_s (штрихпунктир) уровни упираются и с дальнейшим ростом \mathcal{E} перестают быть квазистационарными.

При $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ минимума потенциала больше не существует, однако аналитическое продолжение формул (3) и (4) дает комплексную энергию, которая определяет положение ($\text{Re } E$) и полуширину ($-\text{Im } E$) резонанса. Например, в чисто электрическом поле, подставляя в (4) $\alpha = -i$, получаем

$$\begin{aligned}
 E = & 2\mathcal{E}^{1/2} + \left(\frac{p}{\sqrt{2}} - iN \right) \mathcal{E}^{3/4} + \frac{1}{32} \left[3 \left(N^2 + m^2 - \frac{p^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \mathcal{E} + \\
 & + \frac{1}{1024} \left[\frac{p}{\sqrt{2}} \left(\frac{23}{2} p^2 + 24N^2 + 24m^2 - \frac{43}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + iN(12p^2 + 23N^2 + 81m^2 - 31) \right] \mathcal{E}^{5/4} + O(\mathcal{E}^{3/2}), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где выписан дополнительный член $\sim \mathcal{E}^{5/4}$, которого нет в (4).

3. Выберем теперь невозмущенный потенциал V_0 и возмущение W по-другому:

$$V_0 = 1/8 \mathcal{H}^2 \rho^2 + 1/z + \mathcal{E} z, \quad (7)$$

$$W = V - V_0 = \frac{1}{r} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} z^{-3} \rho^2 + \frac{3}{8} z^{-5} \rho^4 - \frac{5}{16} z^{-7} \rho^6 + O(\rho^8).$$

В невозмущенном уравнении Шредингера переменные разделяются и волновая функция факторизуется:

$$\chi(\rho, z) = F_{nz}(z) |n_\rho, m\rangle, \quad E = E_\rho + E_z,$$

где $F_{nz}(z)$ и E_z — собственная функция и собственное значение одномерного гамильтониана

$$H_z = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + v(z), \quad v(z) = \frac{1}{z} + \mathcal{E} z,$$

$|n_\rho, m\rangle$ и $E_\rho = N\mathcal{H}/2$ — волновая функция и энергия двумерного изотропного гармонического осциллятора с потенциалом $\mathcal{H}^2 \rho^2/8$. Последовательный учет возмущающих членов (7) приводит к разложению при больших \mathcal{H} :

$$E = \frac{N}{2} \mathcal{H} + E_z + \sum_{k=1}^{\infty} E^{(k)} \mathcal{H}^{-k}. \quad (8)$$

Коэффициенты $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ и т. д. находятся по формулам теории возмущений Рэля — Шредингера. Пользуясь тем, что в осцилляторном базисе

$$\langle n_\rho, m | \rho^2 | n_\rho, m \rangle = 2N\mathcal{H}^{-1},$$

$$\langle n_\rho, m | \rho^2 | n_\rho + 2, m \rangle = [(N+m+1)(N-m+1)]^{1/2} \mathcal{H}^{-1},$$

находим, что с точностью до членов порядка \mathcal{H}^{-3} энергия определяется из одномерного уравнения Шредингера

$$\left\{ \frac{1}{2} N \mathcal{H} + H_z - N z^{-3} \mathcal{H}^{-1} + \frac{3}{4} (3N^2 - m^2 + 1) z^{-5} \mathcal{H}^{-2} - \right. \\ \left. - \left[\frac{5}{4} N (5N^2 - 3m^2 + 7) z^{-7} + N z^{-9} \right] \mathcal{H}^{-3} - E \right\} F(z) = 0.$$

Чтобы получить явные формулы для коэффициентов $E^{(k)}$ при малых \mathcal{E} , разложим потенциал $v(z)$ в окрестности точки минимума $z_0 = \mathcal{E}^{-1/2}$:

$$v(z) = 2\mathcal{E}^{1/2} + (z - z_0)^2 \mathcal{E}^{3/2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (z - z_0)^{i+2} \mathcal{E}^{(i+3)/2}.$$

При этом аналогично п. 2 энергию E_z и матричные элементы, входящие в формулы для $E^{(k)}$, можно разложить по степеням $\mathcal{E}^{1/2}$. В результате находим

$$E^{(0)} = E_z = \mathcal{E}^{1/2} \left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p \mathcal{E}^{1/4} + \frac{1}{64} (-3p^2 + 5) \mathcal{E}^{3/4} + \frac{\sqrt{2} p}{4096} (23p^2 + 5) \mathcal{E}^{5/4} + O(\mathcal{E}) \right]$$

$$E^{(1)} = -N \mathcal{E}^{3/4} \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} p + \frac{1}{64} (-3p^2 + 37) \mathcal{E}^{1/2} + 2^{-27/2} p (115p^2 + 8217) \mathcal{E}^{3/2} + O(\mathcal{E}) \right],$$

$$E^{(2)} = \mathcal{E}^{5/2} \left\{ 3(1 - m^2) \left[\frac{1}{4} + \frac{15\sqrt{2}}{32} p \mathcal{E}^{1/4} + \frac{1}{256} (75p^2 + 355) \mathcal{E}^{3/4} + \right. \right.$$

$$\left. + 2^{-31/2} p (175p^2 + 208845) \mathcal{E}^{5/4} \right] + N^2 \left[\frac{27\sqrt{2}}{64} p \mathcal{E}^{3/4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{256} (75p^2 + 611) \mathcal{E}^{5/4} + 2^{-33/2} p (465p^2 + 892851) \mathcal{E}^{7/4} \right] + O(\mathcal{E}) \left. \right\}, \quad (9)$$

$$E^{(3)} = -N\mathcal{E}^3 \left[1 + 3\sqrt{2} p \mathcal{E}^{1/4} + \frac{1}{16} (57p^2 + 235) \mathcal{E}^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2} p}{2048} (983p^2 + 110805) \mathcal{E}^{3/4} - N^2 \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}^{1/2} + \frac{425\sqrt{2}}{256} p \mathcal{E}^{3/4} \right) + \right. \\ \left. + 15m^2 \left(\frac{1}{8} \mathcal{E}^{1/2} + \frac{43\sqrt{2}}{128} p \mathcal{E}^{3/4} \right) + O(\mathcal{E}) \right],$$

где N и p даются формулой (5).

Отметим, что после подстановки (9) в (8) и перегруппировки слагаемых легко получить разложение энергии при фиксированном \mathcal{H} и $\mathcal{E} \rightarrow 0$:

$$E = 1/2 N \mathcal{H} + 2 \mathcal{E}^{1/2} + 1/2 \sqrt{2} p \mathcal{E}^{3/4} + \dots$$

4. В рамках метода $1/n$ -разложения энергия состояний с фиксированными n_z , n_p и $m \rightarrow \infty$ разлагается по степеням n^{-1} , где $n = n_z + n_p + m + 1$:

$$E = n^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k n^{-k}.$$

Здесь \mathcal{E} и \mathcal{H} уменьшаются с ростом n таким образом, что остаются постоянными масштабированные напряженности $F = n^4 \mathcal{E}$ и $B = n^3 \mathcal{H}$. Подробности метода изложены в [3]. Как правило, вначале ($k \leq 3$) коэффициенты ϵ_k убывают (по модулю), затем начинают возрастать. В достаточно сильном электрическом поле, $F > F_*(B)$, коэффициенты ϵ_k становятся комплексными.

Суммирование $1/n$ -разложения методом аппроксимант Паде позволяет рассчитать энергию даже в наименее благоприятном случае, при $n=1$ [3]. Результаты расчета $E(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ для основного состояния даны на рис. 2 (в ат. ед.). С ростом \mathcal{H} энергия уровня возрастает, а ширина — уменьшается. При $\mathcal{E} < \mathcal{E}_* = n^{-4} F$, ширина уровня весьма мала и $1/n$ -разложение не позволяет ее определить. Для $\mathcal{H} = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ соответственно $\mathcal{E}_* = 0; 0,010; 0,023; 0,037; 0,051; 0,066$.

5. При $\mathcal{H} = 0$ переменные в уравнении Шредингера разделяются в параболических координатах $\xi = r + z$, $\eta = r - z$. Энергия высоковозбужденных состояний определяется из квазиклассических условий квантования Бора — Зоммерфельда по переменным ξ и η .

При $m=0$ входящие в них интегралы вычисляются аналитически, как и для эффекта Штарка в атоме водорода [4]. В результате получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{E^{3/2}}{4\mathcal{E}} \left(1 + \frac{4\beta_1 \mathcal{E}}{E^2} \right) f \left(1 + \frac{4\beta_1 \mathcal{E}}{E^2} \right) &= n_z + \frac{1}{2} \\ \frac{i\beta_2}{\sqrt{2} E^{1/2}} f \left(\frac{4\beta_2 \mathcal{E}}{E^2} \right) &= n_p + \frac{1}{2} \\ \beta_1 + \beta_2 &= -1 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где $f(z) = {}_2F_1(1/4, 3/4, 2, z)$ — гипергеометрическая функция. При $\mathcal{E} \rightarrow 0$ квазиклассическая энергия разлагается по степеням $\mathcal{E}^{1/4}$, причем первые два члена разложения совпадают с точными (6), а у следующих членов верны лишь коэффициенты при старших степенях N , p .

Наиболее долгоживущие резонансы $|n_z, 0, 0\rangle$ в классическом пределе $n_z \rightarrow \infty$ соответствуют колебаниям позитрона по оси z между ядром и анодом. Степень перекрытия соседних долгоживущих резонансов характеризуется параметром $\Gamma/\Delta E$. При $\mathcal{E} \rightarrow 0$ $\Gamma/\Delta E = \sqrt{2} \approx 1,41$. Численное решение системы (10) показало, что с ростом \mathcal{E} это отношение незначительно уве-

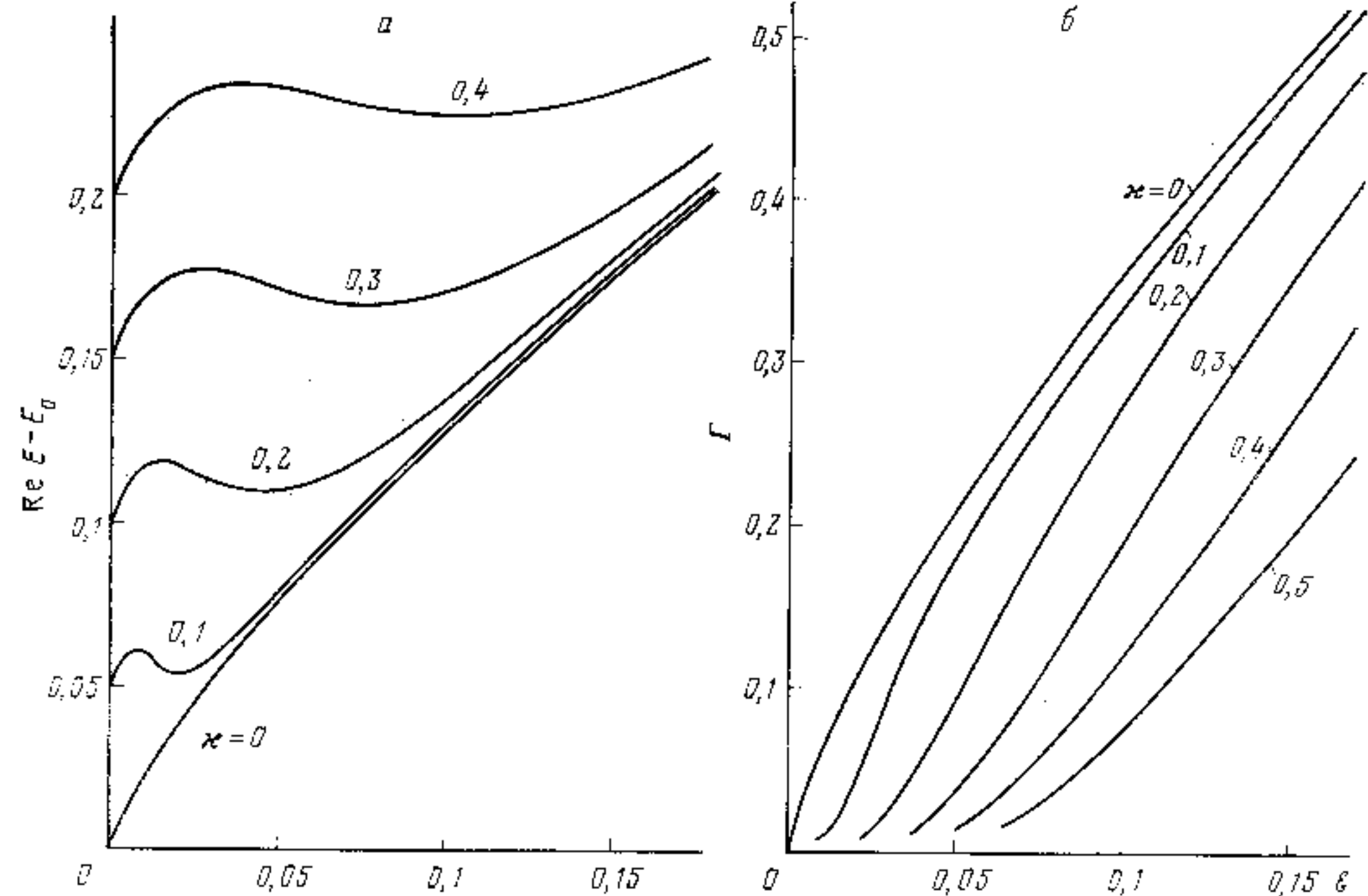


Рис. 2. Энергия (а) и ширина (б) основного уровня в зависимости от \mathcal{E} и \mathcal{H} . У кривых указаны значения магнитного поля \mathcal{H} . Энергия и напряженности полей \mathcal{E} и \mathcal{H} измеряются в ат. ед. которые составляют соответственно $27,21$ эВ, $5,142 \cdot 10^9$ В/см и $2,350 \cdot 10^9$ Гс

личивается, достигая $1,75$ при $\mathcal{E} = 20$ кВ/см для $n = 30$. Следовательно, при $\mathcal{H} = 0$ все долгоживущие резонансы перекрываются между собой как в слабых, так и в сильных полях. В отличие от позитронных резонансов штарковские электронные резонансы могут не перекрываться даже при положительных энергиях [2].

6. Сформулируем основные результаты. При условии $\mathcal{H}^4 > 16\mathcal{E}^3$ позитронные резонансы с энергиями $E < E_n$ распадаются путем квантового туннелирования и их ширина весьма мала. В зависимости от выбора невозмущенного гамильтониана возможны разложения решений как в слабом электрическом поле (4), так и в сильном магнитном поле (8). Для точного нахождения энергии может служить $1/n$ -разложение; в случае больших n_x, n_p и в чисто электрическом поле удобно использовать квазиклассику.

Эффекты конечной массы ядра, релятивизма и возможности аннигиляции здесь не учитывались и требуют дополнительных исследований.

Отметим, что пара позитронов или пара электронов не образует подобных резонансов, так как при переходе в движущуюся с.ц.м. внешнее электрическое поле исключается.

Автор благодарит В. С. Попова, А. И. Шерстюка и Ю. Н. Демкова за полезные обсуждения.

Литература

1. Демков Ю. Н., Овчинников С. Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 14.
2. Мур В. Д., Попов В. С. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 125.
3. Мур В. Д. и др. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. С. 32.
4. Вайнберг В. М. и др. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 450.

POSITRON-NUCLEUS RESONANCES IN ELECTRIC
AND MAGNETIC FIELDS

Resonance states of the positron in a Coulomb field of the nucleus and in parallel homogeneous electric and magnetic fields are investigated. Within the framework of classical mechanics the positron oscillates along the symmetry axis being reflected in turn from the nucleus and from the anode. The magnetic field prevents the positron from going round the nucleus and flying away to the cathode stabilizing the resonances. The nucleus is considered as being infinitely heavy, and the problem is reduced to the one-particle Schrödinger equation. Versions of perturbation theory in a weak electric field and in a strong magnetic field, $1/n$ expansion, and quasiclassical theory are used for determination of the resonance energies and widths. Results of various methods are in good agreement.