

ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ЮКАВЫ

СЕРГЕЕВ А. В., ШЕРСТЮК А. И.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. С. И. ВАВИЛОВА

(Поступила в редакцию 15 апреля 1983 г.)

Метод вычисления высших порядков теории возмущений (ТВ), основанный на переходе к задаче на возмущение фоковского оператора с чисто дискретным спектром, обобщен на случай уравнения Дирака с потенциалом типа Юкавы. Поправки любого порядка ТВ к энергии произвольного связанного состояния могут быть в этом случае представлены в виде конечных многочленов, которые определяются с помощью рекуррентных соотношений, вытекающих из динамической симметрии невозмущенной задачи. Предложенные в работе модифицированные аппроксиманты Паде позволяют преобразовать расходящиеся ряды ТВ в быстроходящую последовательность для всех связанных и квазистационарных состояний системы.

1. Введение

Квантовомеханическая задача о движении частицы в поле центрально-симметричного потенциала вида

$$U(r) = -Zr^{-1}V(\lambda r), \quad V(0) = 1, \quad (1)$$

где $V(x)$ — некоторая целая аналитическая функция переменной $x = \lambda r$, часто встречается в теории ядра и физике плазмы. Так, в случае потенциала Юкавы $V(x) = \exp(-x)$, а в случае потенциала чармония $V(x) = 1 - x^2$.

Развитые в последнее время [1–3] методы вычисления высших порядков теории возмущений (ТВ) позволяют получать решения в аналитическом виде и исследовать их функциональные свойства в широкой области изменения квантовых чисел и параметров. В нерелятивистском приближении высшие порядки ТВ по параметру λ для потенциалов типа (1) получены недавно в работах [3–7]. Использование обобщенных методов суммирования формально расходящихся рядов [8–10] позволяет существенно расширить область применимости ТВ и получать уровни энергии вплоть до порога ионизации [3, 5, 7, 11], а также рассчитывать квазистационарные состояния [7, 12].

При больших значениях Z необходимо учитывать релятивистские эффекты. Ранее [13] на основе метода штурмовских разложений были получены замкнутые выражения для поправок ТВ к связанным состояниям уравнения Дирака в случае широкого класса возмущающих потенциалов. В случае потенциала (1) в работе [14] аналогичным методом найдены первые три порядка ТВ при произвольных квантовых числах.

Однако при переходе к высшим порядкам трудоемкость расчетов быстро возрастает. В то же время для нахождения решений в широкой области изменения λ требуется вычисление достаточно большого числа членов ряда.

В настоящей работе для вычисления высших порядков ТВ использован метод, основанный на свойстве динамической симметрии невозмущенного фоковского оператора с чисто дискретным спектром, одинаково удобный как для основного, так и для произвольного возбужденного состояния уравнения Дирака. В результате удалось получить общие аналитические

выражения для коэффициентов разложения по степеням λ , что позволяет при использовании обобщенных методов суммирования рядов с высокой точностью вычислять энергии связанных и квазистационарных состояний при любых значениях квантовых чисел n , l и j .

2. Теория возмущений для дираковского оператора

Будем искать волновую функцию стационарных состояний уравнения Дирака в виде [15]

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} f_1(r) \Omega_{jlm} \\ i^{l+l'} f_2(r) \Omega_{j'l'm} \end{pmatrix},$$

где l и j — орбитальный и полный моменты системы, Ω_{jlm} — шаровой спинор, $l' = 2j - l$. После отделения угловых переменных и масштабного преобразования $r \rightarrow Zr$ уравнение Дирака с потенциалом (1) сводится к системе двух уравнений для умноженных на r радиальных функций f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dr} + \frac{k}{r} f_1 &= \beta [-\beta^{-2} - E - r^{-1} V(\epsilon r)] f_2, \\ \frac{df_2}{dr} - \frac{k}{r} f_2 &= \beta [-\beta^{-2} + E + r^{-1} V(\epsilon r)] f_1. \end{aligned} \quad (2)$$

(В системе единиц $\hbar = e = m = 1$.) Здесь $k = l(l+1) - j(j+1) - 1/4$, $\beta = \alpha Z$, α — постоянная тонкой структуры, E — энергия, деленная на Z^2 , $\epsilon = \lambda/Z$.

В силу аналитичности функции $V(x)$ имеет место разложение

$$r^{-1} V(\epsilon r) = r^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} V_i \epsilon^i r^{i-1} = r^{-1} + \delta V_\epsilon(r), \quad (3)$$

где V_i — постоянные коэффициенты.

Собственные функции и собственные значения E будем искать также в виде разложений по степеням параметра ϵ :

$$E = E_0 + \delta E, \quad \delta E = \sum_{N=1}^{\infty} E_N \epsilon^N, \quad (4)$$

где E_0 — невозмущенное собственное значение системы (2) с потенциалом $V_0(r) = r^{-1}$, δE — поправка, связанная с наличием возмущения δV_ϵ .

В соответствии с подходом, предложенным в [13], перейдем к системе уравнений для функций $F(x)$ и $G(x)$, связанных с f_1 и f_2 соотношениями

$$F(x) = (2 - 2E_\epsilon)^{1/2} f_1(\nu x/2) + (2 + 2E_\epsilon)^{1/2} f_2(\nu x/2),$$

$$G(x) = -(2 - 2E_\epsilon)^{1/2} f_1(\nu x/2) + (2 + 2E_\epsilon)^{1/2} f_2(\nu x/2),$$

где $E_\epsilon = \beta^2 E_0$, $\nu = \beta(1 - E_\epsilon^2)^{-1/2}$, $x = 2\nu^{-1}r$. Исключая из полученной системы одну из функций, $G(x)$, приходим к одному уравнению второго порядка для функции $F(x)$, после чего посредством замены искомой функции

$$F(x) \rightarrow y(x) = [\nu - k + w(x)]^{-1/2} F(x), \quad (5)$$

где

$$w(x) = (\nu^2 x/2) [\delta E + \delta V_\epsilon(\nu x/2)], \quad (6)$$

приводим полученное уравнение к самосопряженной форме

$$(L - N) Y(x) = W(x) Y(x), \quad (7)$$

где $N = E_\epsilon \nu + 1/2$, L — самосопряженный оператор,

$$L = -\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \frac{s^2}{4x} + \frac{x}{4}, \quad (8)$$

$s = 2(k^2 - \beta^2)^{1/2}$. Невозмущенное уравнение

$$(L - N) y^{(0)}(x) = 0 \quad (9)$$

соответствует случаю кулоновского поля и имеет чисто дискретный спектр собственных значений $N_p = p + (s+1)/2$ [16], где $p=0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число. Приравнивая $N=N_p$, получаем

$$v = \{ [p + (k^2 - \beta^2)^{1/2}]^2 + \beta^2 \}^{1/2}$$

и формулу Зоммерфельда для невозмущенной энергии $E_0 = \beta^{-2} (1 - \beta^2/v^2)^{1/2}$. Стоящий в правой части формулы (7) оператор W связан с наличием возмущения. Имеем

$$W(x) = E_c [w(x) - w'(x)] + (1 - E_c^2) x^{-1} w(x) [2v + w(x)] + A(x) [2E_c(v + w(x)) - x + 1] - xA^2(x) + xA'(x), \quad (10)$$

где $w(x)$ определяется формулой (6),

$$A(x) = w'(x)/2[v - k + w(x)], \quad w'(x) = dw/dx, \quad A'(x) = dA/dx.$$

Пользуясь выражением (10), представим оператор W в виде разложения по степеням ε :

$$W(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \varepsilon^m. \quad (11)$$

Не зависящие от ε функции $W_m(x)$, согласно соотношениям (3), (4) и (6), являются многочленами от x степени m с коэффициентами, зависящими от E_1, E_2, \dots, E_m .

Решения уравнения (7) будем искать в виде разложений

$$Y(x) = \sum_N \varepsilon^N \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(N)} y_p(x), \quad C_p^{(0)} = \delta_{pp_0}, \quad (12)$$

где $C_p^{(N)}$ — коэффициенты разложения поправочной функции N -го порядка по полной системе $\{y_p\}$ собственных функций уравнения (9), p_0 — радиальное квантовое число невозмущенной функции $y_{p_0}(x)$,

$$y_p(x) = \left[\frac{p!}{\Gamma(p+s+1)} \right]^{1/2} x^{s/2} e^{-x/2} L_p^{(s)}(x),$$

$L_p^{(s)}(x)$ — многочлен Лагерра.

Подставляя (11) и (12) в уравнение (7), домножая слева на $y_q(x)$ и интегрируя по x , получаем

$$(q - p_0) C_q^{(N)} = \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{p=q-m \\ (p \geq 0)}}^{q+m} W_m(q, p) C_p^{(N-m)}, \quad (13)$$

где

$$W_m(q, p) = \langle y_q | W_m | y_p \rangle.$$

Существенно отметить, что в силу динамической симметрии невозмущенной задачи [17] при любых целых p, q и m $W_m(q, p) = 0$, если $|q - p| > m$, и, следовательно, сумма по m и p в правой части (13) является конечной, причем в каждом порядке $C_p^{(N_0)} = 0$ при $|p - p_0| > N_0$.

Формула (13) позволяет вычислять коэффициенты $C_q^{(N)}$, если известны коэффициенты $C_p^{(N_0)}$ ($N_0 < N$) и матричные элементы $W_m(q, p)$ ($m \leq N$). Для получения поправки N -го порядка к энергии, E_N , используем соотношение

$$W_N(p_0, p_0) = - \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{\substack{p=p_0-m \\ (p \geq 0)}}^{p_0+m} W_m(p_0, p) C_p^{(N-m)}, \quad (14)$$

вытекающее из (13) при $q = p_0$. Поскольку $W_N(p_0, p_0)$ линейно зависит от

E_N , соотношение (14) позволяет непосредственно выразить E_N через E_j и коэффициенты $C_p^{(i)}$ при $i, j \leq N-1$ с помощью простой рекуррентной процедуры. В результате E_N можно представить в виде многочлена от v^2, k, E_c :

$$E_N = 2^{-\alpha_N} \sum_{i_1=M}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{2(N-i_1-1)} \sum_{i_3=0}^{2(i_1-M)+i_2} B_{i_1 i_2 i_3}^{(N)} v^{2i_1} k^{i_2} E_c^{i_3}, \quad (15)$$

где α_N — целое число, M — целая часть числа $(N-1)/2$, причем индекс i_3 пробегает такие значения, что сумма i_2+i_3+N нечетна,

$$B_{i_1 i_2 i_3}^{(N)} = \sum_{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N} \gamma_{i_1 i_2 i_3}^{(N)}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N) V_1^{\kappa_1} V_2^{\kappa_2} \dots V_N^{\kappa_N}, \quad (16)$$

где $\kappa_j \geq 0$, $\gamma_{i_1 i_2 i_3}^{(N)}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N)$ — целые числа, причем $\sum_{j=1}^N j \kappa_j = N$. При

$p=0, v^2=k^2$ и E_N являются многочленами только от двух переменных E_c и k . Явные аналитические выражения для нескольких первых поправок ТВ к энергии произвольного состояния приведены в Приложении.

3. Суммирование рядов теории возмущений для связанных и квазистационарных состояний

В большинстве случаев ряды ТВ имеют ограниченный радиус сходимости или являются асимптотическими. Поэтому при достаточно больших значениях параметра разложения возникает необходимость в использовании обобщенных методов суммирования рядов.

В случае уравнения Дирака с потенциалом Юкавы

$$U(r) = -Zr^{-1}e^{-\lambda r} \quad (V_i = (-1)^i/i!)$$

с помощью выражений (13) и (14) было вычислено 26 коэффициентов разложения (4) для всех состояний с квантовыми числами $n=1, 2, 3$ при $\beta=0$ (нерелятивистский случай), $10\alpha, 20\alpha, 40\alpha, 80\alpha, 110\alpha$ и предельном значении $\beta=137|k|\alpha$ ($\alpha^{-1}=137,036$). Во всех случаях знаки E_N чередуются, а $|E_N|$ быстро возрастает с увеличением N . Зависимость $|E_N|$ от β является убывающей. Например, для состояния $1s_{1/2}$ при $Z=\beta/\alpha=0, 40, 80, 110, 137$ величины E_{25} равны соответственно $1,021 \cdot 10^{12}; 6,911 \cdot 10^{11}; 1,779 \cdot 10^{11}; 1,921 \cdot 10^{10}; 8,423 \cdot 10^8$.

Для суммирования рядов ТВ использовался метод аппроксимант Паде (АП) [8]. Обычные АП $[M/L]$ к функции $f(\varepsilon)$ удовлетворяют, как известно, линейным уравнениям

$$Q_L(\varepsilon) f^{[M/L]}(\varepsilon) - P_M(\varepsilon) = 0, \quad Q_L(0) = 1, \quad (17)$$

где $P_M(\varepsilon)$ и $Q_L(\varepsilon)$ — многочлены степени соответственно M и L , коэффициенты которых определяются из условия

$$Q_L(\varepsilon) f(\varepsilon) - P_M(\varepsilon) = o(\varepsilon^{M+L}).$$

Метод дает хорошие результаты в нерелятивистском случае ($\beta=0$) [5, 7]. В случае уравнения Дирака этим методом вычислены энергии связанных состояний при всех значениях ε вплоть до порога.

Для иллюстрации зависимости E от ε удобно использовать масштабное преобразование $E \rightarrow \tilde{E}' = n^2 E'$, $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon} = n^2 \varepsilon$, где $E' = E - \beta^{-2}$. При фиксированных l и j и различных n значения функций $\tilde{E}'(\varepsilon)$ весьма близки между собой. На рис. 1 представлена зависимость величины \tilde{E}' от ε для состояний $1s_{1/2}, 2s_{1/2}, 3s_{1/2}$ при $\beta/\alpha=0, 80, 110$. В нерелятивистском случае ($\beta=0$) все три кривые в пределах точности рисунка совпадают между собой.

В табл. 1 представлены критические значения $\varepsilon = \varepsilon_c$, при которых уровни энергии выходят в сплошной спектр. Во втором столбце приведено не-

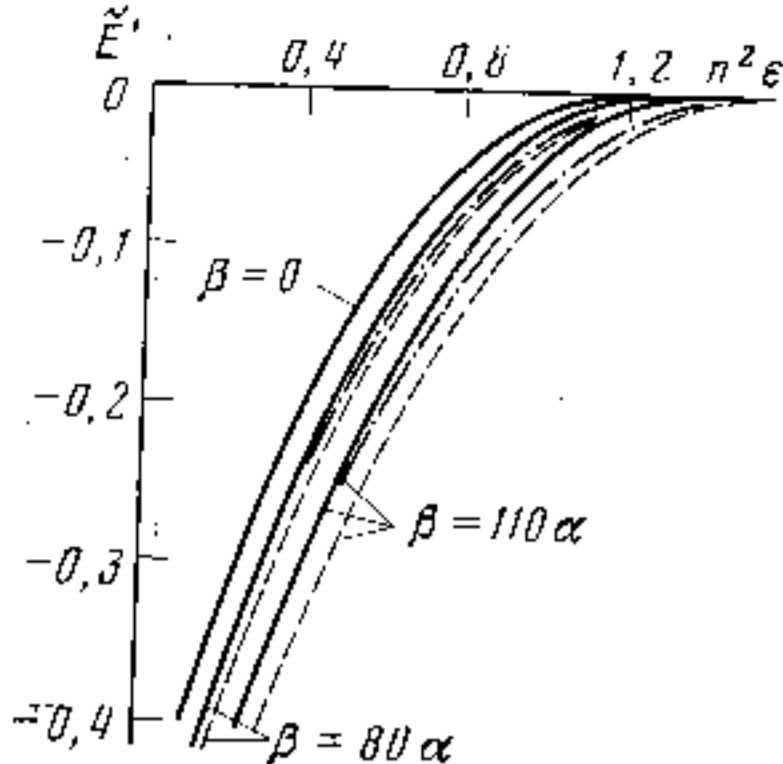


Рис. 1

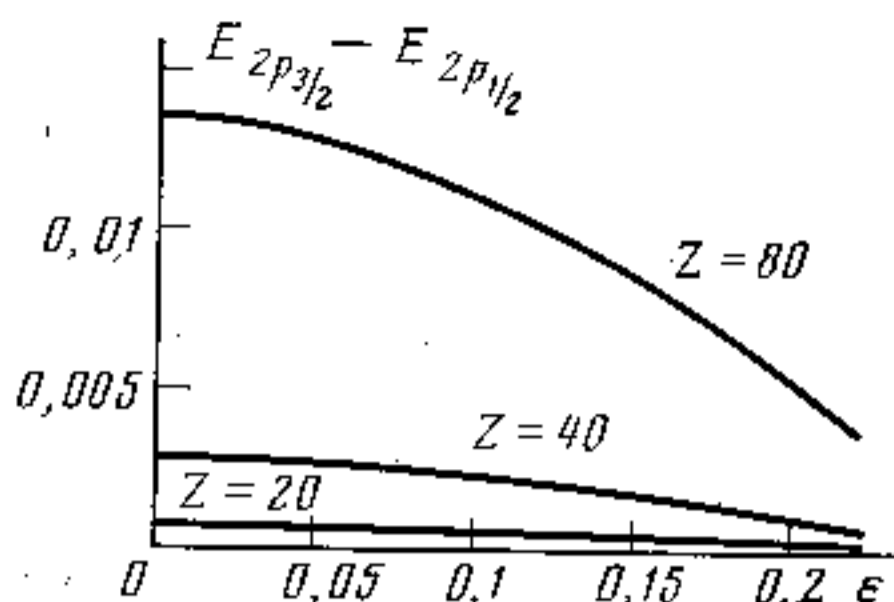


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость энергии s -уровней от параметра экранирования при различных β .

$E'_{1s_{1/2}}$ — сплошные кривые, $E'_{2s_{1/2}}$ — штриховые, $E'_{3s_{1/2}}$ — штрихпунктирные
($E' = (n/Z)^2(E - \alpha^{-2})$ ат. ед.)

Рис. 2. Величина дублетного расщепления уровня $2p$ в зависимости от ϵ (в ат. ед.)

релятивистское значение ϵ_c^H ($\beta=0$), в столбцах 3, 4 и 5 — релятивистские значения ϵ_c при $\beta/\alpha=40, 80, 110$. Соответствующие значения λ_c равны $\epsilon_c Z$. При малых Z значения ϵ_c хорошо аппроксимируются формулой

$$\epsilon_c \approx \epsilon_c^H + \beta^2 \delta \epsilon_c. \quad (18)$$

Коэффициенты $\delta \epsilon_c$ приведены в последнем столбце табл. 1. Формула (18) позволяет определять значения ϵ_c с точностью не ниже 2% в области Z от 0 до 80 для всех указанных в таблице состояний.

При $\epsilon > \epsilon_c$ в случае $l \neq 0$ из-за наличия центробежного барьера возникают квазистационарные состояния [7], вследствие чего на отрезке (ϵ_c, ∞) накапливается много полюсов АП, и последовательность АП становится расходящейся. Для нахождения энергии в этой области требуется построить многозначную аподитическую функцию, которая давала бы действительную и мнимую часть энергии при $\epsilon > \epsilon_c$. При использовании обычных «линейных» АП, удовлетворяющих соотношению (17), этого можно добиться, например, посредством подходящего преобразования независимой переменной [7]. Если такое преобразование осуществляется с помощью некоторой неоднозначной функции, содержащей в явном виде заранее заданное значение параметра ϵ_c , то таким способом удастся добиться достаточно высокой точности определения энергии и ширины брейт-вигнеровского резонанса [12].

В общем случае при наличии как связанных, так и квазистационарных состояний требуется разработать достаточно универсальный метод суммирования, не предполагающий наличия априорной информации о пороговом значении ϵ . Для того чтобы приблизить неоднозначную функцию единым аналитическим выражением, может быть предложен подход, являющийся в определенном смысле обобщением метода АП. В отличие от обычных АП, удовлетворяющих линейным соотношениям (17), рассмотрим модифицированные аппроксиманты, которые являются решениями нелинейных уравнений с полиномиальными коэффициентами, определяемыми из разложения приближаемой функции в ряд Тейлора.

Рассмотрим, например, «квадратичные» диагональные аппроксиманты $[N, N, N]$, удовлетворяющие уравнениям

$$P_N(\epsilon) [E^{[N, N, N]}(\epsilon)]^2 + Q_N(\epsilon) E^{[N, N, N]}(\epsilon) + R_N(\epsilon) = 0, \quad (19)$$

где $P_N(\epsilon)$, $Q_N(\epsilon)$ и $R_N(\epsilon)$ — полиномы степени N , определяемые из условия

$$P_N(\epsilon) [E(\epsilon)]^2 + Q_N(\epsilon) E(\epsilon) + R_N(\epsilon) = o(\epsilon^{3N+1}), \quad P_N(0) = 1. \quad (20)$$

Релятивистские значения критического параметра экранирования
 $\epsilon_c(Z) = \lambda_c(z)/z$, ат. ед.

nlj	$\epsilon_c^H(Z=0)$	$\epsilon_c(40)$	$\epsilon_c(80)$	$\epsilon_c(110)$	$\delta\epsilon_c$
$1s_{1/2}$	1,1906	1,2050	1,2557	1,342	0,162
$2s_{1/2}$	0,31021	0,31676	0,3408	0,3848	0,0736
$2p_{3/2}$	0,220	0,221	0,223	0,225	0,008
$2p_{1/2}$	0,220	0,224	0,239	0,265	0,05
$3s_{1/2}$	0,13945	0,1421	0,1516	0,1686	0,0298
$3p_{3/2}$	0,113	0,114	0,115	0,117	0,0061
$3p_{1/2}$	0,113	0,115	0,121	0,133	0,021
$3d_{5/2}$	0,0913	0,0914	0,0919	0,0924	0,014
$3d_{3/2}$	0,0913	0,0918	0,0930	0,0946	0,005

Таблица 2

Сходимость «квадратичных» аппроксимант к энергии состояния $2p$

N	$E'(N, N, N) \cdot 10^3$		N	$E'(N, N, N) \cdot 10^3$	
	$\epsilon=0,23$	0,26		$\epsilon=0,23$	0,26
9	1,033 (0,409)	3,888 (3,40)	15	1,152 (0,407)	3,817 (3,37)
11	1,177 (0,382)	3,802 (3,38)	16	1,152 (0,407)	3,817 (3,37)
13	1,151 (0,411)	3,816 (3,36)			

В формуле (20) функция $E(\epsilon)$ представляет собой ряд Тейлора (4) по степеням ϵ с известными коэффициентами. $3N+2$ неизвестных коэффициентов многочленов P_N, Q_N, R_N находятся таким образом путем решения системы линейных уравнений.

Сходимость аппроксимант к энергии $2p_{1/2}$ -состояния при $\beta=0$ и при значениях $\epsilon=0,23; 0,26$ продемонстрирована в табл. 2, где приведены значения одной ветви функции $E^{[N, N, N]}(\epsilon)$. В скобках указана мнимая часть функции. Значения $\text{Re } E'(\epsilon)$ и $\text{Im } E'(\epsilon)$ для $2p$ -состояния при $\epsilon > \epsilon_c$ полностью согласуются с соответствующими результатами, полученными в [12] методом конформного преобразования.

В соответствии с общими результатами работ [18, 19] зависимость $\text{Im } E_{nl}'$ от ϵ при $l \neq 0$ вблизи порога с высокой точностью описывается соотношением

$$\text{Im } E_{nl}'(\epsilon) \approx C_0(nl) (\epsilon - \epsilon_c)^{1+1/2}. \quad (21)$$

Для $2p_{1/2}$ - и $3p_{1/2}$ -состояний при $\beta=0$ имеем соответственно $C_0(2p)=0,42$, $C_0(3p)=0,36$.

Наряду с этим были рассмотрены аппроксиманты более высоких (третьей, четвертой и пятой) степеней. Во всех случаях результаты хорошо согласуются между собой.

На рис. 2 представлена зависимость от ϵ деленной на Z^2 величины дублетного расщепления уровня $2p$ ($E_{2p_{3/2}} - E_{2p_{1/2}}$). Результаты, полученные с использованием АП [8/8] и [13/12], различаются менее чем на 10^{-4} при всех Z .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Из рекуррентных соотношений (13), (14) непосредственно получаем

$$E_1 = -V_1; \quad E_2 = 2^{-1}V_2(k + k^2E_c - 3v^2E_c);$$

$$E_3 = 2^{-1}V_3v^2[k^2 - 1 + kE_c(3 + 2kE_c) - v^2(1 + 4E_c^2)];$$

$$E_4 = 2^{-3}v^2\{6V_4k + 3k^2E_c(V_4 + V_2^2) + 2k^3(V_2^2 - 3V_4) +$$

$$+k^3 E_c^2 V_2^2 (4+k E_c) + k^4 E_c (2V_2^2 - 3V_4) + \\ +v^2 [6k V_4 (1+4E_c^2) - 5E_c (5V_4 + V_2^2) + \\ +6k^2 E_c (3V_4 + V_2^2) + 6k^2 E_c^3 (2V_4 - V_2^2)] + \\ +v^4 E_c [-3(5V_4 + 4V_2^2) + 5E_c^2 (V_2^2 - 4V_4)] \};$$

$$E_5 = 2^{-3} v^4 \{ -12V_5 + 10k E_c (5V_5 + V_2 V_3) + \\ +k^2 (15V_5 + V_2 V_3) + 4k^2 E_c^2 (5V_5 + 6V_2 V_3) + \\ +4k^4 E_c^2 (2V_2 V_3 - 3V_5) + 8k^4 E_c^4 V_2 V_3 - \\ -30k^3 E_c (V_5 - E_c^2 V_2 V_3) - k^4 (3V_5 + V_2 V_3) + \\ +v^2 [6k E_c (5V_5 + 4V_2 V_3) - 3(1+6E_c^2) (5V_5 + 3V_2 V_3) + \\ +2k^2 (3V_5 + 5V_2 V_3) + 10k E_c^3 (4V_5 - V_2 V_3) + \\ +12k^2 E_c^2 (4V_5 + 3V_2 V_3) + 16k^2 E_c^4 (V_5 - 2V_2 V_3)] + \\ +v^4 [24E_c^4 (V_2 V_3 - V_5) - 3(V_5 + 3V_2 V_3) - \\ -12E_c^2 (3V_5 + 5V_2 V_3)] \}.$$

Выражения для E_1 , E_2 , E_3 , полученные в работе [14], совпадают с нашими результатами.

Литература

1. Долгов А. Д., Попов В. С. ЖЭТФ, 1978, 75, 2010.
2. Aharonov Y., Au C. K. Phys. Rev. Lett., 1979, 42, 1582; 43, 176.
3. Шерстюк А. И., Школьник А. М. Изв. АН СССР, серия физ., 1977, 41, 2648.
4. Grant M., Lai C. S. Phys. Rev., 1979, A20, 718.
5. Вайнберг В. М., Елецкий В. Л., Попов В. С. ЖЭТФ, 1981, 81, 1567.
6. Privtan V. Phys. Lett., 1981, 81A, 326.
7. Сергеев А. В., Шерстюк А. И. ЖЭТФ, 1982, 82, 1070.
8. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИИЛ, 1951.
9. Baker G. A. Essentials of Padé Approximants. N. Y., 1975.
10. Елецкий В. Л., Попов В. С. ЯФ, 1978, 28, 1109.
11. Popov V. S., Weinberg V. M. Preprint ITP-101, Moscow, 1982.
12. Weinberg V. M. Preprint ITP-160, Moscow, 1982.
13. Шерстюк А. И. ЖЭТФ, 1972, 62, 1238.
14. McEnnan J., Kissel L., Pratt R. H. Phys. Rev., 1976, A13, 532.
15. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
16. Фок В. А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976, ч. V.
17. Павинский П. П., Шерстюк А. И. Вестн. ЛГУ, 1968, № 22, 11.
18. Островский В. Н., Соловьев Е. А. ЖЭТФ, 1972, 62, 167.
19. Кукулин В. И., Краснопольский В. М., Миселхи М. ЯФ, 1979, 29, 818.

HIGHER ORDER PERTURBATIONS FOR BOUND STATES OF DIRAC'S EQUATION WITH YUKAWA POTENTIAL

SERGEEV A. V., SHERSTYUK A. I.

The method of calculation of the higher order terms of the perturbation series based on solving the problem of perturbed Fock operator with a purely discrete spectrum, is generalized to the case of Dirac equation with a Yukawa-type potential. Perturbation corrections of any order to the energy of an arbitrary bound state may be then presented as finite polynomials which are determined by recurrent relations being a consequence of the dynamical symmetry of the non-perturbed problem. The modified Padé approximants suggested in the paper make it possible to transform the diverging perturbation expansions into a fast converging series for all bound and quasistationary states of the system.