ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 3

УДК 519.651

РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ — ЭРМИТА

СЕРГЕЕВ А. В.

(Ленинград)

Предложен алгоритм последовательного вычисления многозначных аппроксимаций, или аппроксимаций Паде – Эрмита. Для многочленов, которые участвуют в определении аппроксимаций Паде – Эрмита, получены простые формулы, обобщающие рекуррентные соотношения между числителями и знаменателями подходящих цепных дробей. Найдены общие выражения для коэффициентов рекуррентных соотношений в случаях квадратичных и кубических аппроксимаций к функциям $(1+x)^\alpha$ и e^x.

§ 1. Введение

Если функция φ задана в виде разложения

$$(1.1)\qquad \varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i x^i,$$

то для приближенного вычисления суммы ряда (1.1) часто используются аппроксимации Паде. По определению, аппроксимацией Паде $[n_1, n_2]$ называется отношение многочленов $A^{(2)}$ и $A^{(1)}$ степеней не выше n_2 и n_1 соответственно, которое имеет те же n_1+n_2+1 первых коэффициентов разложения в ряд Маклорена, что и функция φ. Многочлены $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ в этом случае удовлетворяют соотношению

$$A^{(1)}(x)\varphi(x)-A^{(2)}(x)=o(x^{n_1+n_2}).$$

В работах Эрмита [1] и Паде [2] рассматривался также более общий случай, когда несколько многочленов входят в качестве коэффициентов в линейные соотношения между несколькими функциями.

Пусть $f^{(1)},\ldots,f^{(k)}$ — функции, разлагающиеся в ряд Маклорена.

Тогда формой Паде — Эрмита типа $[n_1,\ldots,n_k]$, ассоциированной с системой $(f^{(1)},\ldots,f^{(k)})$, согласно [3], [4] называется система многочленов $(A^{(1)},\ldots,A^{(k)})$ степеней не выше $n_1,\ldots,n_k$ соответственно, если

$$(1.2)\qquad \sum_{p=1}^{k}A^{(p)}(x)f^{(p)}(x)=o(x^{N-2}),\qquad N=\sum_{i=1}^{k}n_i+k.$$

Будем называть остаточной функцией

$$(1.3)\qquad S(x)=\frac{1}{x^{N-1}}\sum_{p=1}^{k}A^{(p)}(x)f^{(p)}(x).$$

Аппроксимация Паде — Эрмита $(\tilde{f}^{(1)},\ldots,\tilde{f}^{(k)})$ находится из уравнения

$$\sum_{p=1}^{k} A^{(p)}(x)\tilde{f}^{(p)}(x)=0.$$

Для того чтобы функции $\tilde{f}^{(1)},\ldots,\tilde{f}^{(k)}$ определялись однозначно, обычно накладываются какие-либо ограничения или связи как на $f^{(1)},\ldots,f^{(k)}$, так и на $\tilde{f}^{(1)},\ldots,\tilde{f}^{(k)}$. При $k=3$, например (см. [5]), для квадратичных аппроксимаций $f^{(1)}(x)=1$, $f^{(3)}(x)=[f^{(2)}(x)]^2$, а для интегральных аппроксимаций $f^{(1)}(x)=1$, $f^{(3)}(x)=(d/dx)f^{(2)}(x)$.

Аппроксимации Паде — Эрмита применяются для приближенного вычисления суммы ряда (1.1) вблизи особенностей функции φ, которые могут быть отличны от полюсов [5]. Например, если функция φ имеет точки ветвления типа квадратного корня, то обычно используются квадратичные аппроксимации ($f^{(1)}=1$, $f^{(2)}=\varphi$, $f^{(3)}=\varphi^2$). Приближенное значение функции φ находится в этом случае решением квадратного уравнения $A^{(1)}+A^{(2)}\tilde{\varphi}+$ $+A^{(3)}\tilde{\varphi}^2=0$:

$$(1.4)\qquad \tilde{\varphi}=\frac{-A^{(2)}\pm[(A^{(2)})^2-4A^{(1)}A^{(3)}]^{1/2}}{2A^{(3)}}.$$

Уравнение (1.2) можно записать также в виде системы $N-1$ однородных линейных уравнений для N коэффициентов многочленов $A^{(1)},\ldots,A^{(k)}$. При вычислении формы Паде — Эрмита путем решения системы линейных уравнений общим методом количество операций растет пропорционально N^3 с увеличением N, а объем памяти — пропорционально N^2.

В настоящей работе для вычисления форм Паде — Эрмита с последовательно возрастающими на единицу значениями N используются формулы, обобщающие известные рекуррентные соотношения между числителями и знаменателями подходящих цепных дробей. Требуемое количество операций при этом растет пропорционально N^2, а объем памяти — пропорционально N.

Для построения таблицы аппроксимаций Паде — Эрмита всевозможных типов $[n_1,\ldots,n_k]$ ранее предлагался рекурсивный алгоритм, основанный на обобщенном тождестве Фробениуса [3]. Новый алгоритм вычисляет только последовательность аппроксимаций, стоящих на главной диагонали таблицы ($n_1=\ldots=n_k$), или ближайших к ним внедиагональных аппроксимаций. Именно такие аппроксимации обычно используются для обобщенного суммирования рядов. Алгоритм из [3] неудобен для построения диагональной последовательности аппроксимаций, так как для определения формы Паде — Эрмита типа $[n_1,\ldots,n_k]$ приходится вычислять большое количество форм типов $[n_1',\ldots,n_k']$, для которых

$$\sum_{i=1}^{k} n_i'<\sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Соотношения, близкие к тем, которые будут выведены в § 2, получены в работах [1], [2].

Отметим, что конструкция аппроксимаций Паде — Эрмита допускает множество видоизменений. Рассмотрим, например, две системы целых неотрицательных чисел: $(r_0, \ldots, r_k)$ и $(s_1, \ldots, s_k)$, таких что

$$\sum_{i=0}^{k} r_i = \sum_{p=1}^{k} s_p.$$

Зададим систему многочленов $B^{(i)}$, $i=0, 1, \ldots, k$, степеней не выше r_i соотношениями $B^{(0)}(x) f^{(p)} - B^{(p)}(x) = o(x^{s_p})$, $p=1, 2, \ldots, k$, которые равносильны системе

$$N-1 = \sum_{p=1}^{k} s_p + k$$

однородных линейных уравнений для

$$N = \sum_{i=0}^{k} r_i + k + 1$$

неизвестных коэффициентов многочленов. Естественно считать дроби $B^{(p)}(x)/B^{(0)}(x)$ для $p=1, 2, \ldots, k$ аппроксимациями функций $f^{(p)}(x)$ (см. [6]). Алгоритм построения цепных дробей был обобщен на подобные совместные аппроксимации в работах [7], [8] при помощи алгоритма Якоби — Перрона.

§ 2. Описание алгоритма

Как известно [9], для вычисления диагональной лестничной последовательности аппроксимаций Паде ($n_1=n_2$ или $n_1=n_2+1$) удобно преобразовать функцию в цепную дробь.

Пусть S_0, $S_1, \ldots$ — последовательность функций, определенная соотношениями

(2.1а) $\quad S_0(x) = -1, \qquad S_1(x) = \varphi(x),$

(2.1б) $\quad xS_N(x) = S_{N-2}(x) S_{N-1}(0) - S_{N-2}(0) S_{N-1}(x).$

Тогда для любого $N \geqslant 2$ функцию φ можно представить в виде цепной дроби:

$$\varphi(x) = \frac{c_0^{(0)}}{c_0^{(1)}+} \sum_{i=1}^{N-2} \frac{xc_i^{(0)}}{c_i^{(1)}-} \frac{xS_N(x)}{S_{N-1}(x)},$$

где $\quad c_i^{(0)} = S_{i+1}(0), \quad c_i^{(1)} = -S_i(0).$

Подходящая дробь

$$\frac{A_N^{(2)}(x)}{A_N^{(1)}(x)} = \frac{c_0^{(0)}}{c_0^{(1)}+} \sum_{i=1}^{N-2} \frac{xc_i^{(0)}}{c_i^{(1)}}$$

является аппроксимацией Паде $[(N-2)/2; (N-2)/2]$, если N четно, или $[(N-1)/2, (N-3)/2]$, если N нечетно.

Для вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей удобно использовать простые соотношения

$$A_1^{(1)} = 1, \quad A_1^{(2)} = 0, \quad A_2^{(1)} = 1, \quad A_2^{(2)} = \varphi(0),$$

(2.2) $\quad A_N^{(p)}(x) = xc_{N-2}^{(0)} A_{N-2}^{(p)}(x) + c_{N-2}^{(1)} A_{N-1}^{(p)}(x),$

где $p=1, 2$.

Отметим также, что для любого $N \geqslant 1$

(2.3) $$A_N^{(1)}(x)\varphi(x) - A_N^{(2)}(x) = x^{N-1}S_N(x).$$

Процедура (2.1) известна как алгоритм Висковатова [10] и представляет собой последовательное деление с остатком степенных рядов.

Обобщим теперь алгоритм Висковатова на случай произвольного числа функций $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$.

Пусть $(A_N^{(1)}, \ldots, A_N^{(N)})$ и S_N для $N=1, 2, \ldots, k$ — это формы Паде — Эрмита типа $[0, \ldots, 0]$, ассоциированные с $(f^{(1)}, \ldots, f^{(N)})$, и соответствующие остаточные функции; $A_N^{(N+1)} = \ldots = A_N^{(k)} = 0$.

Опишем рекурсивный алгоритм для вычисления форм Паде — Эрмита $(A_N^{(1)}, \ldots, A_N^{(k)})$ типа

(2.4) $$[\underbrace{n, \ldots, n}_{m}, \underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{k-m}]$$

и соответствующих остаточных функций S_N, где $n=1, 2, \ldots, m=1, 2, \ldots, k$, $N=kn+m$.

Сначала определяются S_N вместе с некоторыми вспомогательными функциями S_{Nq}, $q=1, 2, \ldots, k-2$, при помощи рекуррентных соотношений, применяемых для $N=k+1, k+2, \ldots$:

(2.5) $$\begin{aligned} xS_{N1}(x) &= S_{N-k}(x)S_{N-k+1}(0) - S_{N-k}(0)S_{N-k+1}(x), \\ xS_{N2}(x) &= S_{N1}(x)S_{N-k+2}(0) - S_{N1}(0)S_{N-k+2}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xS_{N,k-2}(x) &= S_{N,k-3}(x)S_{N-2}(0) - S_{N,k-3}(0)S_{N-2}(x), \\ xS_N(x) &= S_{N,k-2}(x)S_{N-1}(0) - S_{N,k-2}(0)S_{N-1}(x). \end{aligned}$$

Далее строятся $A_N^{(p)}$ вместе со вспомогательными многочленами $A_{Nq}^{(p)}$, $q=1, 2, \ldots, k-2$, при помощи рекуррентных соотношений

(2.6) $$\begin{aligned} A_{N1}^{(p)}(x) &= xA_{N-k}^{(p)}(x)S_{N-k+1}(0) - S_{N-k}(0)A_{N-k+1}^{(p)}(x), \\ A_{N2}^{(p)}(x) &= A_{N1}^{(p)}(x)S_{N-k+2}(0) - S_{N1}(0)A_{N-k+2}^{(p)}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{N,k-2}^{(p)}(x) &= A_{N,k-3}^{(p)}(x)S_{N-2}(0) - S_{N,k-3}(0)A_{N-2}^{(p)}(x), \\ A_N^{(p)}(x) &= A_{N,k-2}^{(p)}(x)S_{N-1}(0) - S_{N,k-2}(0)A_{N-1}^{(p)}(x). \end{aligned}$$

Используя (2.5) и (2.6), можно доказать индукцией по N, что для всех $N=k+1, k+2, \ldots$

(2.7) $$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{k} A_{N1}^{(p)}(x)f^{(p)}(x) = x^{N-k+1}S_{N1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{p=1}^{k} A_{N,k-2}^{(p)}(x)f^{(p)}(x) = x^{N-2}S_{N,k-2}(x), \\ &\sum_{p=1}^{k} A_N^{(p)}(x)f^{(p)}(x) = x^{N-1}S_N(x). \end{aligned}$$

Последнее уравнение (2.7) означает, что $(A_N^{(1)},\dots,A_N^{(k)})$ и S_N удовлетворяют соотношениям (1.2) и (1.3), определяющим форму Паде — Эрмита и остаточную функцию; степени многочленов легко оценить из (2.6):

$$\deg A_N^{(p)} \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } p\leqslant m \\ n-1, & \text{если } p>m, \end{cases}$$

где n — целая часть числа $(N-1)/k$, $m=N-kn$.

Систему (2.6) можно представить в виде одной формулы, обобщающей рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей цепных дробей:

$$A_N^{(p)}(x)=xc_{N-k}^{(0)}A_{N-k}^{(p)}(x)+\sum_{i=1}^{k-1} c_{N-k}^{(i)}A_{N-k+i}^{(p)}(x), \tag{2.8}$$

где

$$c_{N-k}^{(0)}=\prod_{j=N-k+1}^{N-1} S_j(0), \quad c_{N-k}^{(1)}=-S_{N-k}(0)\prod_{j=N-k+2}^{N-1} S_j(0),$$

$$c_{N-k}^{(i)}=-S_{N,i-1}(0)\prod_{j=N-k+i+1}^{N-1} S_j(0) \quad \text{для } i=2,3,\dots,k-2,$$

$$c_{N-k}^{(k-1)}=-S_{N,k-2}(0).$$

Аналогичным образом можно переписать (2.5):

$$x^{k-1}S_N(x)=c_{N-k}^{(0)}S_{N-k}(x)+\sum_{i=1}^{k-1} x^{i-1}c_{N-k}^{(i)}S_{N-k+i}(x). \tag{2.9}$$

В частном случае $k=2$, $f^{(1)}=\varphi$, $f^{(2)}=-1$ формулы (2.8), (2.9) и последнее уравнение (2.7) переходят, соответственно, в (2.2), (2.1) и (2.3).

Коэффициенты $c_{N-k}^{(i)}$, $i=0, 1,\dots,k-1$, можно также определить с точностью до несущественного общего множителя непосредственно из соотношения

$$c_{N-k}^{(0)}S_{N-k}(x)+\sum_{i=1}^{k-1} x^{i-1}c_{N-k}^{(i)}S_{N-k+i}(x)=o(x^{k-2}), \tag{2.10}$$

равносильного системе $k-1$ однородных линейных уравнений, получающихся после разложения левой части (2.10) по степеням x и приравнивания нулю коэффициентов при $x^0,\dots,x^{k-2}$.

Формулы (2.8) и (2.9) инвариантны относительно замены

$$A_N^{(p)}\to d_N A_N^{(p)}, \quad S_N\to d_N S_N, \quad c_N^{(i)}\to d_{N+k}d_{N+i}^{-1}c_N^{(i)}, \tag{2.11}$$

где $d_1, d_2,\dots$ — произвольные числа, отличные от нуля.

Так как $A_N^{(1)},\dots,A_N^{(k)}$ и S_N определены с точностью до постоянного общего множителя, то коэффициенты $c_N^{(i)}$ в соотношениях (2.8) и (2.9) допускают произвольное преобразование вида (2.11) при условии, что $d_1=\dots=d_k=1$. Нормировочные постоянные $d_{k+1}, d_{k+2},\dots$ удобно подбирать, например, так, чтобы после замены (2.11) было $c_N^{(0)}=1$ или $c_N^{(k-1)}=1$.

Отметим, что рекуррентные соотношения, аналогичные (2.8), выполняются и для более общей последовательности форм Паде — Эрмита типа $[n_1+n,\dots,n_m+n,\ n_{m+1}+n-1,\ n_{m+2}+n-1,\dots,n_k+n-1]$ с фиксированными $n_1,\dots,n_k$.

§ 3. Примеры

Алгебраической аппроксимацией степени $k-1$ к функции φ будем называть набор решений алгебраического уравнения

$$\sum_{p=1}^{k} A^{(p)}\tilde{\varphi}^{p-1}=0$$

относительно неизвестной $\tilde{\varphi}$, где $(A^{(1)},\dots,A^{(k)})$ — форма Паде — Эрмита, ассоциированная с $(1,\ \varphi,\ \varphi^2,\dots,\varphi^{k-1})$. Алгебраические аппроксимации в последнее время часто используются в физических приложениях [5], [11], [12]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких аппроксимаций.

Пользуясь очевидным соотношением $[\varphi(x)-\varphi(0)]^{N-1}=o(x^{N-2})$, условимся выбирать $A_N^{(i)}$ и S_N при $N=1,2,\dots,k$ следующим образом:

$$A_N^{(i)}=\binom{N-1}{i-1}[-\varphi(0)]^{N-i},\qquad S_N(x)=\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right]^{N-1}.$$

Для вычисления многочленов $A_N^{(p)}$ и остаточных функций S_N при $N=k+1,\ k+2,\dots$ будем применять рекуррентные соотношения (2.8) и (2.9) с заменой (2.11). Постоянные $d_{k+1},\ d_{k+2},\dots$ будут подбираться так, чтобы коэффициенты $c_N^{(i)}$ записывались наиболее простым образом.

Приведем несколько примеров, когда коэффициенты $c_N^{(i)}$ укладываются в некоторую общую формулу, что может быть использовано в дальнейшем, например, для исследования сходимости аппроксимаций Паде — Эрмита.

В случае алгебраических аппроксимаций степени $k-1$ к функции $\varphi(x)=(1+x)^{1/k}$ легко доказывается по индукции, что

$$c_N^{(0)}=1,\qquad c_N^{(i)}=-\binom{k}{i},\qquad i=1,2,\dots,k-1, \tag{3.1}$$

$$S_N(x)=\left[\frac{\varphi(x)-1}{x}\right]^{N-1}.$$

Часто при помощи численного эксперимента можно подобрать общие формулы для коэффициентов $c_N^{(i)}$, но строго доказать эти формулы не удается из-за громоздкости выкладок.

Например, для квадратичных ($k=3$) алгебраических аппроксимаций к функции $(1+x)^\alpha$

$$c_{3n+1}^{(0)}=(2\alpha+n)(\alpha+n),\qquad c_{3n+1}^{(1)}=-(3n+1)(2\alpha+n), \tag{3.2а}$$

$$c_{3n+2}^{(0)}=-(2\alpha+n)(2\alpha-n-1),\qquad c_{3n+2}^{(1)}=(3n+2)(2\alpha-n-1), \tag{3.2б}$$

$$c_{3n+3}^{(0)}=(2\alpha-n-1)(\alpha-n-1),\qquad c_{3n+1}^{(2)}=\alpha-3n^2-3n-1, \tag{3.2в}$$

$$c_{3n+3}^{(1)}=c_{3n+2}^{(2)}=c_{3n+3}^{(2)}=-3, \tag{3.2г}$$

а для кубических ($k=4$) аппроксимаций к $(1+x)^\alpha$

(3.3а) $\quad c_{4n+1}^{(0)}=(\alpha+n)(2\alpha+n)(3\alpha+n)$,

(3.3б) $\quad c_{4n+2}^{(0)}=-(3\alpha+n)(2\alpha+n)(3\alpha-n-1)$,

(3.3в) $\quad c_{4n+3}^{(0)}=(3\alpha+n)(2\alpha-n-1)(3\alpha-n-1)$,

(3.3г) $\quad c_{4n+4}^{(0)}=-(\alpha-n-1)(2\alpha-n-1)(3\alpha-n-1)$,

(3.3д) $\quad c_{4n+1}^{(1)}=-(4n+1)(2\alpha+n)(3\alpha+n)$,

(3.3е) $\quad c_{4n+2}^{(1)}=(4n+2)(3\alpha+n)(3\alpha-n-1)$,

(3.3ж) $\quad c_{4n+3}^{(1)}=-(4n+3)(2\alpha-n-1)(3\alpha-n-1)$,

(3.3з) $\quad c_{4n+1}^{(2)}=-(3\alpha+n)[(2n-1)\alpha+6n^2+4n+1]$,

(3.3и) $\quad c_{4n+2}^{(2)}=-(3\alpha-n-1)[(2n+3)\alpha-6n^2-8n-3]$,

(3.3к) $\quad c_{4n+1}^{(3)}=-(2n+1)(2\alpha^2-3\alpha+2n^2+2n+1)$,

(3.3л) $\quad c_{4n+4}^{(1)}=c_{4n+2}^{(3)}=c_{4n+3}^{(3)}=c_{4n+4}^{(3)}=-4, \qquad c_{4n+3}^{(2)}=c_{4n+4}^{(2)}=-6$,

где $n=0, 1, 2, \ldots$.

В частном случае $\alpha=1/k$ при $k=3, 4$ коэффициенты (3.2) и (3.3) переходят в (3.1) после преобразования (2.11) с постоянными

$$d_{N+k}=\prod_{n=0}^{[(N-1)/k]}\prod_{i=1}^{k-1}\left(n+\frac{i}{k}\right)^{-1}.$$

Коэффициенты $c_N^{(i)}$ для аппроксимаций к функции e^x находятся непосредственно из (3.2) и (3.3) с использованием соотношения

$$e^x=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Для квадратичных аппроксимаций к e^x

$$(3.4)\qquad (c_N^{(0)}, c_N^{(1)}, c_N^{(2)})=\begin{cases}(2,-2N,1), & N\equiv1 \pmod 3,\\ (-4,2N,-3), & N\equiv2 \pmod 3,\\ (2,-3,-3), & N\equiv0 \pmod 3,\end{cases}$$

а для кубических аппроксимаций к e^x

$$(3.5)\quad (c_N^{(0)}, c_N^{(1)}, c_N^{(2)}, c_N^{(3)})=\begin{cases}(6, -6N, -\,^3/_2\,(N-3), -N-1), & N\equiv1 \pmod 4,\\ (-18), 9N, -\,^3/_2(N+4), -4), & N\equiv2 \pmod 4,\\ (18, -6N, -6, -4), & N\equiv3 \pmod 4,\\ (-6, -4, -6, -4), & N\equiv0 \pmod 4.\end{cases}$$

Выражения (3.2)—(3.5) обобщают известные формулы для коэффициентов представления в виде цепной дроби функций $(1+x)^\alpha$ и e^x.

Отметим, что системы многочленов, удовлетворяющих (1.2) для произвольного набора экспонент, изучались в [1]. Диагональные квадратичные аппроксимации к функциям $(1+x)^{1/3}$ и e^x были получены в общем виде в [13].

В квантовой механике и теории поля часто встречаются ряды теории возмущений, члены которых факториально возрастают [9]. Рассмотрим в качестве примера обобщенное суммирование ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} j!z^j \tag{3.6}$$

путем построения последовательности аппроксимаций вида (2.4).

Ряд (3.6) является асимптотическим для функции

$$\psi(z)=\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-zt}\,dt \tag{3.7}$$

при $z\to 0$, $|\arg z|>0$. Значения $\psi(z)$ при всех z, не лежащих на $(0, \infty)$, где функция ψ имеет разрез, могут быть вычислены путем преобразования ряда (3.6) в цепную дробь [9].

При $z\to x\pm i0$, $x\in(0, \infty)$ последовательность цепных дробей становится расходящейся. В этом случае для вычисления $\psi(z)$ удобно воспользоваться квадратичными аппроксимациями, так как ими можно приближать функции, имеющие разрезы.

Несколько первых коэффициентов $c_N^{(i)}$ приведено в таблице. Приближенные значения $\psi_N(z)$ к $\psi(z)$ вычислялись по формуле (1.4), где $A^{(p)}=A_{N+3}^{(p)}$. Для иллюстрации сходимости аппроксимаций в таблице даны вещественные и мнимые части $\psi_N(1)$.

N	$c_N^{(0)}$	$c_N^{(1)}$	$c_N^{(2)}$	Re $\psi_N(1)$	Im $\psi_N(1)$	N	$c_N^{(0)}$	$c_N^{(1)}$	$c_N^{(2)}$	Re $\psi_N(1)$	Im $\psi_N(1)$
1	1	−1	2	1.2500	±0.6614	7	2	−1	2	0.5625	±0.9662
2	1	−1	1	1.0000	±1.0000	8	3	−1	1	0.7667	±1.0703
3	2	−1	0	2.0000	0.0000	9	8	−1	4	0.7005	±1.1268
4	1	1	2	$5/6\pm 1/6$	0.0000	10	3	−3	−1	0.7762	±1.1495
5	12	3	−2	0.9167	±1.2219	11	60	5	8	0.6931	±0.9903
6	9	−2	3	0.5833	±1.1517	12	150	18	−5	0.6880	±1.1567

Значение интеграла (3.7) при $z=1$ зависит от направления обхода полюса, расположенного в точке $t=1$, и составляет

$$\psi(1)=P\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-t}\,dt\pm\frac{\pi}{e}\,i\approx 0.6971\pm 1.1557i.$$

Аппроксимация $\psi_N(1)$ при $N=12$ мало отличается от точного значения $\psi(1)$.

Автор благодарен А. И. Шерстюку за помощь и полезные советы.

Литература

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques.– Ann. Mat., ser. 2, 1893, t. 21. p. 289–308.
2. *Padé H.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques.– J. math. pures et appl., sér. 4, 1894, t. 10, p. 291–329.
3. *Della Dora J., Di-Crescenzo C.* Approximation de Padé-Hermite.– In: Padé Approximants and their Appls. Berlin: Springer, 1979, p. 85–115.
4. *Della Dora J.* Quelques résultats sur la structure des tables de Padé-Hermite.– In: Padé Approximation and its Appls. Berlin-N. Y.: Spinger, 1981, p. 173–184.

5. *Common A. K.* Applications of Hermite-Padé approximants to water waves and the harmonic oscillator on a lattice.— J. Phys. A, 1982, v. 15, № 12, p. 3665—3677.
6. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде.— Матем. сб., 1980, т. 113(155), № 4(12), с. 499—519.
7. *de Bruin M. G.* The interruption phenomenon for generalized continued fractions.— Bull. Austral. Math. Soc., 1978, v. 19, № 2, p. 245—272.
8. *Парусников В. И.* Алгоритм Якоби – Перрона и совместное приближение функций.— Матем. сб., 1981, т. 114(156), № 2, с. 322—333.
9. *Bender C. M., Orszag S. A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers. N. Y. etc.: McGraw-Hill, 1978.
10. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гостехтеориздат, 1956.
11. *Short L.* The evaluation of Feinman integrals in the physical region using multivalued approximants.— J. Phys. G, 1979, v. 5, № 2, p. 167—198.
12. *Сергеев А. В., Шерстюк А. И.* Высшие порядки теории возмущений для связанных состояний уравнения Дирака с потенциалом типа Юкавы.— Ядерная физ., 1984, т. 39, № 5, с. 1158—1164.
13. *Shafer R. E.* On quadratic approximation.— SIAM J. Numer. Analys., 1974, v. 11, № 2, p. 447—460.

Поступила в редакцию 12.VII.1984
Переработанный вариант 4. IV.1985