О влиянии магнитного поля на ионизацию атомов

Попов В. С., Сергеев А. В.

Аннотация

В квазиклассическом приближении вычислена вероятность ионизации атомного уровня под действием постоянных электрического и магнитного полей, с учетом кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным остатком. Рассмотрена структура рядов теории возмущений (ТВ) для энергии уровня и найдена асимптотика высших порядков ТВ. В расчетах используется метод "мнимого времени", развитый ранее в теории многофотонной ионизации атомов и ионов.

§1. Введение

Задача об атоме водорода во внешних электромагнитных полях имеет фундаментальное значение для атомной физики, ей посвящена обширная литература (см., например [1 -] и указанные там дальнейшие ссылки). При этом, в большинстве работ рассматриваются несколько первых порядков теории возмущений (ТВ) для энергии уровней. Влияние магнитного поля на ширину уровня, т. е. на вероятность ионизации атома w, изучалось в работах [ ]. Если ограничиться случаем полей, малых по сравнению с характерными внутриатомными полями (см. ниже ( )), то ионизация носит туннельный характер, и можно использовать квазиклассическое приближение (метод ВКБ [ ]).

Задачи о прохождении частиц через потенциальный барьер встречаются в различных областях физики и обычно решаются с помощью метода ВКБ. Обобщением его на случай потенциалов $V(x,t)$, зависящих от времени, а также на многомерный случай является [1] метод "мнимого времени" (ММВ), основной идеей которого является описание подбарьерного движения частицы с помощью классических уравнений движения, но с мнимым "временем".

---

[1] ÌÌÂ áûë ðàçâèò â òåîðèè ìíîãîôîòîííîé èîíèçàöèè àòîìîâ è èîííîâ ïîëåì ñèëüíîé ñâåòîâîé âîëíû [ ], à òàêæå â çàäà÷å î ðîæäåíèè ýëåêòðîí-ïîçèòðîííûõ ïàð èç âàêóóìà â ïåðåìåííîì ýëåêòðè÷åñêîì ïîëå [ ]. Íàèáîëåå ïîäðîáíîå èçëîæåíèå ÌÌÂ äàíî â ðàáîòå [ ]. Â [ ] îí ïðèìåíÿëñÿ äëÿ íàõîæäåíèÿ àñèìïòîòèêè âûñøèõ ïîðÿäêîâ $1/n$-ðàçëîæåíèÿ.

Вычисление функции действия вдоль подбарьерной траектории определяет вероятность туннелирования.

С помощью ММВ был вычислен [ ] главный (экспоненциальный) множитель в вероятности ионизации $w(T, Y)$. Более полное решение этой задачи дано в работах [ ], где применялся метод функций Грина и была вычислена также и предэкспонента. В этих работах, однако, пренебрегалось кулоновским взаимодействием между вылетающим электроном и атомным остатком, в силу чего полученные формулы относятся к ионизации отрицательных ионов (типа H^-, J^- и т. п.), а не к наиболее интересному случаю нейтральных атомов. Можно заметить, что учет кулоновского взаимодействия в таких задачах обычно представляет значительные трудности и, например, в теории многофотонной ионизации не выполнен в полной мере вплоть до настоящего времени [2)]. В данной работе ММВ применяется к вычислению вероятности ионизации атомного уровня под действием постоянных электрического и магнитного полей, при условии

$$T \ll T_0 = \text{æ}^3 T_a, \quad Y \ll Y_0 = \text{æ}^2 Y_a, \qquad (1.1)$$

где $T_a = m_e^2 e^5 / \hbar^4 = 5.142 \cdot 10^9$ В/см и $Y_a = m_e^2 c e^3 / \hbar^3 = 2.350 \cdot 10^9$ Гс — атомные единицы напряженности поля, а $E_0 = -\text{æ}^2 / 2$ — энергия

---

2) Ñì., îäíàêî, ðàáîòû [ ], â êîòîðûõ ïîëó÷åíû íåêîòîðûå ÷àñòíûå ðåçóëüòàòû.

уровня (всюду далее $h = e = m_e = 1$). При этом отношение $\mathrm{Y}\ /\mathrm{T}$, а также угол между полями могут быть произвольными. Заметим, что для основного состояния параметр $æ$ порядка единицы (так, $æ = 1$,

соответственно для атомов водорода, гелия, неона и криптона), однако для высоковозбужденных (ридберговских) состояний он может быть меньше единицы (Например, в атоме водорода $æ = 1/n$ для состояний с главным квантовым числом n). В этом случае поля, сравнимые с T_0 и Y_0, значительно меньше атомных и вполне достижимы на эксперименте.

Возможность ионизации означает, что атом находится в квазистационарном состоянии с комплексной энергией $E = E_0 - i\dfrac{\Gamma}{2}$. Вещественная часть энергии E_0 определяет положение уровня, а вероятность распада Γ — его ширину. Энергия как аналитическая функция напряженности поля T имеет разрез вдоль вещественной оси и существенную особенность при $\mathrm{T} = 0$. Последнее обстоятельство приводит к расходимости ряда ТВ по степеням T при любых напряженностях поля. Для атома водорода в электрическом поле эта расходимость, как известно [5], связана с экспоненциальным убыванием ширины при $\mathrm{T} \to 0$ и носит факториальный характер. В присутствии магнитного поля высшие порядки ТВ могут быть рассмотрены аналогичным образом.

§2. О влиянии магнитного поля на ионизацию атомов

Для вычисления вероятности ионизации $w(\mathrm{T}, \mathrm{Y})$ необходимо найти подбарьерную траекторию электрона и вычислить мнимую часть функции действия:

$$w \propto \exp\left\{-\frac{2}{h}\operatorname{Im} S(0, t_0)\right\}, \tag{2.1}$$

где t_0 — начальный (комплексный) момент подбарьерного движения, а $t = 0$ — момент выхода частицы из-под барьера. Можно показать (см. Приложение), что в случае постоянных полей T и Y учет кулоновского взаимодействия электрона с атомным остатком (заряд Z) можно провести по теории возмущений. Поэтому достаточно определить траекторию электрона при $Z = 0$ (т. е. для δ-потенциала), которая находится аналитически. Экстремальная подбарьерная траектория, минимизирующая мнимую часть действия, определяет наиболее вероятный путь туннелирования частицы и находится из классических уравнений движения с граничными условиями:

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \; \dot{\mathbf{r}}^2(t_0) = -\varkappa^2, \; \operatorname{Im}\mathbf{r}(0) = 0. \tag{2.2}$$

Отсылая за подробностями к [ ], укажем их наглядный смысл. Первые два условия отвечают тому, что электрон в начальный ($t = t_0$) момент находится уже за пределами атома (т. е.

$|V(r_0)| << æ^2$), а искажением волновой функции из-за действия внешних полей T и Y еще можно пренебречь [3]. Последнее условие означает, что наиболее вероятная (экстремальная) траектория при $t = 0$ становится вещественной и далее описывает движение частицы на бесконечность, уже в классически разрешенной области. Переходя к мнимому "времени" $\tau = i\omega t$, получаем искомую траекторию [4]:

$$x = i\frac{T}{\omega^2}\left(\tau - \tau_0\frac{\mathrm{sh}\tau}{\mathrm{sh}\tau_0}\right)\sin\alpha\,,\quad y = \frac{T}{\omega^2}\cdot\frac{\tau_0}{\mathrm{sh}\tau_0}\left(\mathrm{ch}\tau - \mathrm{ch}\tau_0\right)\sin\alpha\,,$$

$$z = \frac{T}{2\omega^2}\left(\tau_0^2 - \tau^2\right)\cos\alpha\,. \tag{2.3}$$

$(-\tau_0 \le \tau \le 0)$, причем

$$\tau_0^2 - \sin^2\alpha\left(\tau_0\,\mathrm{cth}\tau_0 - 1\right)^2 = \gamma^2\,. \tag{2.4}$$

Здесь $\gamma = \omega/\omega_t$, $\omega = eY/m_e c$ — ларморовская частота, $\omega_t = T/æ$ — частота туннелирования в электрическом поле T; ось z взята вдоль Y, ось x перпендикулярна к плоскости (T, Y), α — угол между полями **T** и **Y**. Параметр γ аналогичен параметру

---

[3] Ñòðîãî ãîâîðÿ, ýòè óñëîâèÿ ñîîòâåòñòâóþò íóëåâîìó ðàäèóñó ñèë, ñâÿçûâàþùèõ ýëåêòðîí ñ àòîìíûì îñòàòêîì. Ìîæíî, îäíàêî, ïîêàçàòü, ÷òî ó÷åò êîíå÷íîãî ðàäèóñà äåéñòâèÿ ñèë ïðèâîäèò ê ïîïðàâêàì ïîðÿäêà T/T_0 â ïðåäýêñïîíåíòå, êîòîðûìè ìû ïðåíåáðåãàåì.

[4] Ýòè âûðàæåíèÿ ïîëó÷àþòñÿ àíàëèòè÷åñêèì ïðîäîëæåíèåì èçâåñòíûõ ôîðìóë äëÿ äâèæåíèÿ çàðÿæåííîé ÷àñòèöû â ïîñòîÿííûõ è îäíîðîäíûõ ïîëÿõ (ñì., íàïðèìåð, § â [ ]).

Келдыша [ ], вводимому в теории многофотонной ионизации переменным электрическим полем. Появление такого параметра связано с тем, что в данной задаче имеются две частоты — ω_t и ω, соотношение между которыми может быть произвольным. Заметим, что

$$\gamma = \frac{æY}{c\mathrm{T}} = \left(\frac{I}{I_0}\right)^{1/2} \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}_a}\left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_a}\right)^{-1},$$

где $I = |E_0|$ — энергия связи данного уровня, а $I_0 = 13.6$ ýÂ — потенциал ионизации атома водорода. В дальнейшем рассматриваем основное состояние, поскольку для возбужденных возникают дополнительные усложнения, связанные с вырождением.

Вычисление укороченного действия [ ] S вдоль подбарьерной траектории (2.3) определяет экспоненциальный множитель в вероятности ионизации:

$$w(\mathrm{T},\mathrm{Y}\ ) \propto \exp\left\{-\frac{2\mathrm{T}_0}{3\mathrm{T}}\, g(\gamma,\alpha)\right\}. \qquad (2.5)$$

Функция $g(\gamma,\alpha)$ определена формулой (35) статьи [ ]. Используя уравнение (2.4), можно записать ее в более простом виде:

$$g(\gamma,\alpha) = \frac{3}{2}s\left[1-\left(s^2-1\right)^{1/2}\frac{\sin\alpha}{\gamma}\right] - \frac{1}{2}s^3\cos^2\alpha\,, \qquad (2.6)$$

где $s=\tau_0/\gamma$. При $\gamma \ll 1$ имеем (см. Приложение)

$$g(\gamma,\alpha)=1+\frac{\sin^2\alpha}{30}\gamma^2+\left(\frac{\sin^4\alpha}{216}-\frac{\sin^2\alpha}{315}\right)\gamma^4+$$

$$+\left(\frac{11\sin^6\alpha}{11664}-\frac{\sin^4\alpha}{810}+\frac{\sin^2\alpha}{3150}\right)\gamma^6+\ldots, \qquad (2.6')$$

а в противоположном случае $\gamma \gg 1$ (сильные магнитные поля) эта функция выходит на конечный предел:

$$g(\gamma,\alpha)=|\cos\alpha|^{-1}-\frac{3}{2\gamma}\operatorname{tg}^2\alpha+O(\gamma^{-2}) \qquad (2.6'')$$

(случай $\alpha=\pi/2$ является особым и обсуждается в Приложении А). Графики функций $g(\gamma,\alpha)$ для различных углов α представлены на рис. 1. Если $\alpha\neq 0$, то $g(\gamma,\alpha)>1$, т. е. магнитное поле всегда стабилизирует уровень.

Для учета кулоновского взаимодействия используем процедуру сшивания, вводя точку сшивания r_1 такую, что $æ^{-1} \ll r_1 \ll b$, где b — ширина барьера. При $r \sim r_1$ атомный потенциал в основном уже сводится к кулоновскому, $V(r)\approx -Z/r$, причем $|V(r)| \ll æ^2$. При этом кулоновское взаимодействие слабо искажает подбарьерную траекторию [5], что и позволяет учесть его вклад в действие по теории возмущений:

$$\delta S = -i\eta \ln \ae r_1 - \int_{t_1}^{0} \delta V(\mathbf{r}(t))dt. \tag{2.7}$$

Здесь $\eta = Z/\ae$ — параметр Зоммерфельда, $\mathbf{r}(t)$ — подбарьерная траектория с мнимым временем, $r_1 = \left[\mathbf{r}^2(t_1)\right]^{1/2}$ — точка сшивания и δV — возмущающий потенциал, в данном случае $\delta V(r) = -Z/r$. Из (2.3) находим:

$$r(t) \equiv \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \frac{\mathsf{T}}{\omega^2}\cdot \xi(\tau), \tag{2.8}$$

$$\xi(\tau) = \left\{\frac{1}{4}\left(\tau_0^2 - \tau^2\right)^2 \cos^2\alpha + \tau_0^2\left[\left(\frac{\mathrm{ch}\tau_0 - \mathrm{ch}\tau}{\mathrm{sh}\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{sh}\tau}{\mathrm{sh}\tau_0} - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right]\sin^2\alpha\right\}^{1/2}, \tag{2.8'}$$

что при $\tau \to -\tau_0$ дает:

$$\xi(\tau) = \gamma\,\Delta\tau - \frac{1}{2}s(\Delta\tau)^2 + \mathrm{K}\,,\ \ s = \tau_0/\gamma \tag{2.9}$$

$(\Delta\tau = \tau + \tau_0 \to 0)$, или

$$r(t) = i\ae(t - t_0) + \frac{1}{2}s\mathsf{T}(t - t_0)^2 + \mathrm{K} \tag{2.9'}$$

---

5) Ñì. Ïðèëîæåíèå, à òàêæå àíàëîãè÷íîå ðàññìîòðåíèå äëÿ àòîìà âîäîðîäà â ýëåêòðè÷åñêîì ïîëå [ ].

(Последняя формула соответствует тому, что начальная скорость частицы равна $i\text{æ}$, т. е. является чисто мнимой). Подставляя (2.8), (2.9) в (2.7) и переходя к пределу $\tau_1 \to -\tau_0$ (при этом точка сшивания выпадает из ответа), находим кулоновскую поправку к действию:

$$\delta S = -i\eta\left\{\ln\left(\frac{\text{æ}^3}{\mathrm{T}}s\right) + \int_{-\tau_0}^{0} d\tau\left[\frac{\gamma}{\xi(\tau)} - \frac{1}{\tau_0+\tau}\right]\right\}, \qquad (2.10)$$

что в итоге дает следующий фактор в вероятности ионизации:

$$C(\mathrm{T},\mathrm{Y}\ ) = \left\{\frac{2\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}}\varphi(\gamma,\alpha)\right\}^{2\eta}, \qquad (2.11)$$

$$\varphi(\gamma,\alpha) = \ln\frac{s}{2} + \int_0^{\tau_0} d\tau\left[\frac{\gamma}{\xi(\tau)} - \frac{1}{\tau_0-\tau}\right]. \qquad (2.11')$$

Для удобства вычислений мы здесь изменили знак у переменной τ, воспользовавшись тем, что $\xi(\tau)$ — четная функция. Из (2.9) видно, что интеграл в (2.11') не содержит расходимости на верхнем пределе, и легко может быть найден численно. Результаты расчета представлены на рис. 1.

Заметим, что при выключении магнитного поля $\gamma = 0$, $s \equiv 1$, $\xi(\tau) = \frac{1}{2}(\tau_0^2 - \tau^2)$ и $\varphi(0,\alpha) = 0$. При этом формула (2.11) сводится к известной кулоновской поправке для чисто электрического поля [ ].

Рассмотрим еще случай слабого магнитного поля. Разложение (2.8') при $\tau, \tau_0 \sim \gamma \to 0$ дает:

$$\xi(\tau) = \frac{1}{2}(\tau_0^2 - \tau^2)\left[1 - \frac{\sin^2\alpha}{36}(3\tau_0^2 - \tau^2) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{2\tau_0}(\tau_0^2 - \tau^2) - \frac{\sin^2\alpha}{72}\left(\tau_0^2 - \tau^2\right)^2 + \ldots,$$

откуда

$$\varphi(\gamma, \alpha) = \frac{1}{9}\sin^2\alpha \cdot \gamma^2 + O(\gamma^4), \ \gamma \ll 1. \qquad (2.12)$$

§3. Ионизация в слабом поле и поведение высших порядков теории возмущений

При расчете уровней энергии атома в электрическом поле стандартным подходом является разложение энергии в ряд ТВ

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \mathrm{T}^k. \qquad (3.1)$$

Согласно аргументу Дайсона, нестабильность состояния в сколь угодно слабом поле приводит к расходимости ряда ТВ. Здесь мы изучим поведение высших порядков ТВ E_k в присутствии произвольно направленного магнитного поля $\mathrm{Y} = \gamma \mathrm{T}$. Этот вопрос интересен с общей точки зрения, а также важен при использовании специальных процедур суммирования расходящихся рядов, таких как метод Бореля.

Для оценки поведения E_k используем, как обычно [4 - 6], дисперсионные соотношения:

$$E_k = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{E(\mathrm{T})}{\mathrm{T}^{k+1}} d\mathrm{T}\,, \qquad (3.2)$$

где интегрирование ведется по малой окружности, охватывающей точку $\mathrm{T} = 0$. Некоторые предположения относительно аналитических свойств функции $E(\mathrm{T})$ (см., например, [4]) позволяют при достаточно больших k преобразовать (3.2) к виду:

$$E_k = \frac{-1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\Gamma(\mathrm{T})}{\mathrm{T}^{k+1}} d\mathrm{T}\,. \qquad (3.3)$$

Подставляя сюда квазиклассическую формулу (2.5) для ширины $\Gamma = \mathrm{h}w$, находим:

$$E_k \sim C a^k k^\beta k!, \qquad (3.4)$$

где C, a и β — параметры асимптотики. Наиболее существенный параметр a, которым мы здесь и ограничимся, обратно пропорционален действию вдоль подбарьерной траектории:

$$a = \frac{3}{2\mathrm{T}_0} g^{-1}(\gamma, \alpha)\,, \qquad (3.5)$$

Асимптотика (3.4) записана без учета вклада от второй подбарьерной траектории, отвечающей отрицательному корню уравнения (2.4) $\tau_0^{(-)} = -\tau_0$ и функции $g^{(-)}(\gamma,\alpha) = -g(\gamma,\alpha)$. С учетом второго решения $a^{(-)} = -a$ эта асимптотика принимает вид:

$$E_k \sim Ca^k k^\beta k! + Ca^{(-)^k} k^\beta k! = [1 + (-)^k] Ca^k k^\beta k!, \qquad (3.6)$$

Это согласуется с тем, что энергия является четной функцией напряженности электрического поля и нечетные порядки ТВ обращаются в нуль. В дальнейшем будем рассматривать лишь четные порядки ТВ, опуская множитель $[1 + (-)^k]$ в асимптотике.

Далее для упрощения формул рассмотрим только основное состояние атома водорода, когда $\mathsf{T}_0 = \mathsf{Y}_0 = æ = 1$ (общий случай сводится к водородному простым масштабированием).

При выключении магнитного поля $a = 3/2$ в согласии с известным результатом для эффекта Штарка [5]:

$$E_k \sim -\frac{6}{\pi}\left(\frac{3}{2}\right)^k k! \qquad (3.7)$$

(основное состояние).

Наряду со штарковским разложением (3.1) рассмотрим разложение по Y :

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k \mathsf{Y}^k, \qquad (3.8)$$

где $\widetilde{E}_k = \gamma^{-k} E_k$. В случае эффекта Зеемана $(\gamma \to \infty)$ высшие порядки в разложении (3.8) также факториально растут [6]:

$$\widetilde{E}_k \sim -(-)^{k/2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{5/2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{k} k^{1/2} k!, \tag{3.9}$$

что формально отвечает асимптотике вида

$$\widetilde{E}_k \sim C \tilde{a}^k k^{\beta} k! \tag{3.10}$$

с мнимым параметром

$$\tilde{a} = a/\gamma = \pm(\pi i)^{-1}. \tag{3.11}$$

В то же время при больших γ в силу (2.6") и (3.5) имеем:

$$\tilde{a} = \frac{3}{2\gamma} g^{-1}(\gamma, \alpha) = \frac{3}{2\gamma} |\cos\alpha| \to 0 \tag{3.12}$$

в противоречии с формулой (3.11). Это наводит на мысль о существовании других (комплексных) подбарьерных траекторий, для которых величина $\tilde{a}$ не исчезает в пределе сильных магнитных полей. Ниже мы покажем, решая уравнение (2.4) при больших γ в комплексных числах, что это действительно так.

Вводя обозначения $\tau_0 = i\tilde{\tau}_0$ и $\gamma = i\tilde{\gamma}$, перепишем уравнение (2.4) в виде:

$$\tilde{\tau}_0^2 + \sin^2\alpha (\tilde{\tau}_0 \operatorname{ctg} \tilde{\tau}_0 - 1)^2 = \tilde{\gamma}^2. \tag{3.13}$$

Решение, конечное при $\tilde{\gamma} \to \infty$, имеет вид:

$$\tilde{\tau}_0 = N\pi + N\pi\sin\alpha\cdot\tilde{\gamma}^{-1} + \frac{1}{2}N^3\pi^3\sin\alpha\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\alpha\right)\cdot\gamma^{-3} +$$

$$+N^3\pi^3\sin^2\alpha\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\tilde{\gamma}^{-4} + \frac{1}{2}N^5\pi^5\sin\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha}{N^2\pi^2}+\frac{3}{4}-\sin^2\alpha+\frac{2}{5}\sin^4\alpha\right)\tilde{\gamma}^{-5}$$

$$+2N^5\pi^5\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha-\frac{4}{15}\sin^4\alpha\right)\tilde{\gamma}^{-6}+\ldots, \qquad (3.14)$$

где $N = 1, 2, \ldots$, причем $\tilde{\tau}_0^*$, $-\tilde{\tau}_0$ и $-\tilde{\tau}_0^*$ — также решения уравнения (3.13).

Введем далее функцию

$$G(\gamma,\alpha) = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\pi}g(\gamma,\alpha) = \frac{2\tilde{\tau}_0^3}{3\pi\tilde{\gamma}^2}\left\{1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\left[1+3\operatorname{ctg}\tilde{\tau}_0(\operatorname{ctg}\tilde{\tau}_0 - 1/\tilde{\tau}_0)\right]\right\}. \qquad (3.15)$$

Подставляя разложение (3.14) в (3.15), находим

$$G(\gamma,\alpha) = N - 2N\sin\alpha\cdot\tilde{\gamma}^{-1} + \left(N\sin^2\alpha - \frac{1}{3}N^3\pi^2\cos^2\alpha\right)\tilde{\gamma}^{-2} +$$

$$+N^3\pi^2\left(\frac{2}{3}\sin^2\alpha-1\right)\sin\alpha\cdot\tilde{\gamma}^{-3} + N^3\pi^2\sin^2\alpha\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha-1\right)\tilde{\gamma}^{-4} +$$

$$+N^3\pi^2\sin\alpha\left(-\frac{2}{15}N^2\pi^2\sin^4\alpha+\frac{1}{3}N^2\pi^2\sin^2\alpha-\frac{1}{4}N^2\pi^2-\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\tilde{\gamma}^{-5}+\ldots, \qquad (3.16)$$

где $N = 1, 2, \mathrm{K}$. Нас будет интересовать только случай $N = 1$, когда функция $G(\gamma, \alpha)$ минимальна по модулю. Соответствующие функции $g_{\text{c}}(\gamma, \alpha) = (3\pi / 2\tilde{\gamma}) G(\gamma, \alpha)$ изображены (по модулю) на рис. 1 штриховыми линиями. В области достаточно больших γ, когда $|g_{\text{c}}|$ меньше g, параметр асимптотики a находится по формуле (3.5) с заменой g на g_{c}. Из-за существования комплексно-сопряженных решений асимптотика коэффициентов ТВ имеет более сложную форму:

$$\tilde{E}_k \sim (-1)^{k/2} \operatorname{Re}(CA^k) k^{\beta} k!, \quad A = i\tilde{a} = \left[\pi G(\gamma, \alpha)\right]^{-1}. \tag{3.17}$$

Графики вещественной и мнимой частей функции $G(\gamma, \alpha)$ при различных α даны на рис. 3.

В пределе $\alpha \to 0$ (параллельные поля) разложение (3.16) обрывается на третьем члене. Имеем:

$$G(\gamma, 0) = 1 + \frac{\pi^2}{3\gamma^2}. \tag{3.18}$$

Ряд ТВ при этом является знакопеременным. Однако в достаточно сильном электрическом поле, когда

$$\gamma < \gamma_{\text{c}} = \pi\left[(1+\sqrt{2})^{1/3} - (1+\sqrt{2})^{-1/3}\right]^{-1} \approx 5{,}2705, \tag{3.19}$$

доминирующий вклад дает подбарьерная траектория с вещественным τ_0 (отвечающая $g(\gamma, 0) = 1$), и ряд ТВ знакопостоянен.

Таким образом, для параллельных полей

$$E_k \sim -\left[C_0 \frac{6}{\pi} \left(\frac{3}{2} \right)^k + (-)^{k/2} C_1 \left(\frac{4}{\pi} \right)^{5/2} \left(\frac{\pi}{\gamma} + \frac{\pi^3}{3\gamma^3} \right)^{-k} k^{1/2} \right] k!, \qquad (3.20)$$

где множители C_0 и C_1 — некоторые функции γ. Они могут быть найдены численно, исходя из нескольких десятков коэффициентов ТВ E_k. Не вдаваясь здесь в детали расчета, приведем графики C_0 и C_1 на рис. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**. При малых γ

$$C_0 \sim 1 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \frac{7}{360}\gamma^4 - 0{,}00205\gamma^6 + \ldots, \qquad (3.21)$$

а при больших γ

$$C_1 \sim 1 - 12{,}03\gamma^{-2} + \ldots. \qquad (3.22)$$

Приложение А

Уравнение (2.4) определяет начальный момент подбарьерного движения. Приведем некоторые асимптотики. При $\gamma << 1$:

$$s(\gamma,\alpha)=\frac{\tau_0}{\gamma}=1+\frac{\sin^2\alpha}{18}\gamma^2+\left(\frac{7\sin^4\alpha}{648}-\frac{\sin^2\alpha}{135}\right)\gamma^4+$$

$$+\left(\frac{11\sin^6\alpha}{3888}-\frac{\sin^4\alpha}{270}+\frac{\sin^2\alpha}{1050}\right)\gamma^4+K\,. \qquad (A.1)$$

В другом предельном случае $(\gamma >> 1)$ уравнение (2.4) принимает вид: $\tau_0^2-(\tau_0-1)^2\sin^2\alpha+O(e^{-2\tau_0})=\gamma^2$, откуда

$$\tau_0=-\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{\gamma}{|\cos\alpha|}(1+\gamma^{-2}\operatorname{tg}^2\alpha)^{1/2}+O\big(\gamma\exp(-2\gamma/|\cos\alpha|)\big)=$$

$$=\frac{\gamma}{|\cos\alpha|}-\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2|\cos\alpha|}\cdot\gamma^{-1}+K \qquad (A.2)$$

Подставляя эти разложения в (2.6), приходим к формулам (2.6') и (2.6'').

В случае $\alpha=\pi/2$ (перпендикулярные поля) формулы (А.2) и (2.6'') неприменимы. Соответствующие разложения при $\gamma\to\infty$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}\left[\gamma + \gamma^{-1} + \gamma^{3}\exp(-\gamma^{2}) + \mathrm{K}\right],\\
g &= \frac{3}{8}\gamma\left[\left(1+\gamma^{-2}\right)^{2} - 2\exp\left(-\gamma^{2}\right) + \mathrm{K}\right].
\end{aligned}
\qquad (A.3)
$$

Таким образом, функция $g(\gamma,\pi/2)$ при $\gamma \gg 1$ возрастает линейно (что согласуется с рис. 1), а вероятность ионизации обращается в нуль при $\mathrm{Y} \to \infty$:

$$
w \propto \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{\omega}{\text{æ}^{2}}\varepsilon^{-2} + 2\frac{\text{æ}^{2}}{\omega} + \mathrm{K}\right]\right\}, \qquad (A.4)
$$

где $\varepsilon = \mathrm{T}/\mathrm{T}_0$ (чисто магнитное поле не ионизует связанный уровень).

Литература

1. Первая ссылка

2.

3.

4. C. M. Bender, T. T. Wu, Phys. Rev. D, 7, 1620, 1973.

5. H. J. Silverstone. Phys. Rev. Lett., 43, 1498, 1979.

6. J. E. Avron, Ann. Phys. (N. Y.), 131, 79, 1981.

7.

8.

Подписи к рисункам

Рисунок 1. Функции $g(\gamma,\alpha)$ ...

Рисунок 2. Функции $\varphi(\gamma,\alpha)$ ...

Рисунок 3. Функции $G(\gamma,\alpha)$ ...